D. Faddeev, I. Sominsky

Recueil d'Exercices d'Algèbre Supérieure

Éditions Mir Moscou

Д. ФАДДЕЕВ,
И. СОМИНСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

D. FADDÉEV et I. SOMINSKI

RECUEIL D'EXERCICES D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

CDU 512.8 (075.8)=40

Traduit du russe

par *CHRISTIANE DER-MEGRÉDITCHIAN*

На французском языке

$\Phi \frac{0223-371}{041(01)-73}$ 234 – 72

AVANT-PROPOS

Le présent recueil d'exercices d'algèbre supérieure est le fruit de l'enseignement de cette matière à l'Université d'Etat et à l'Institut pédagogique Herzen de Léningrad. Il est destiné aux étudiants des premières années des Universités et des Instituts pédagogiques, qui suivent un cours fondamental d'algèbre supérieure.

Les problèmes de ce recueil se divisent nettement en deux catégories. D'une part, ce sont de très nombreux exercices numériques destinés à développer la pratique de calcul et à illustrer les principes fondamentaux du cours théorique. Les auteurs sont d'avis que le nombre de ces exercices est amplement suffisant pour les travaux pratiques et les travaux de contrôle.

D'autre part, on a réuni un nombre important de problèmes d'un niveau moyen et de problèmes difficiles dont la résolution exige de la part des étudiants qu'ils fassent preuve d'initiative et d'une certaine ingéniosité.

Pour de nombreux problèmes de cette catégorie on se référera aux Indications (deuxième partie du livre). Les numéros de ces problèmes sont précédés d'un astérisque.

Les réponses sont données pour tous les problèmes, et pour certains d'entre eux on a présenté les solutions détaillées.

Les auteurs

PREMIÈRE PARTIE

ÉNONCÉS

Chapitre premier

NOMBRES COMPLEXES

§ 1. Opérations sur les nombres complexes

1. $(1 + 2i)\,x + (3 - 5i)\,y = 1 - 3i.$

Trouver x et y en estimant qu'ils sont réels.

2. Résoudre le système en estimant x, y, z et t réels:

$$(1 + i)\,x + (1 + 2i)\,y + (1 + 3i)\,z + (1 + 4i)\,t = 1 + 5i,$$
$$(3 - i)\,x + (4 - 2i)\,y + (1 + i)\,z + 4it = 2 - i.$$

3. Calculer i^n, où n est un nombre entier.

4. Vérifier l'identité:

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)\,(x - 1 + i)\,(x + 1 + i)\,(x + 1 - i).$$

5. Calculer

a) $(1 + 2i)^6$; b) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$; c) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$.

6. Trouver les conditions pour lesquelles le produit de deux nombres complexes est purement imaginaire.

7. Effectuer les opérations indiquées:

a) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; b) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$; c) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

d) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$; e) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

8. Calculer $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, où n est un nombre entier positif.

9. Résoudre les systèmes d'équations:

a) $(3 - i)\,x + (4 + 2i)\,y = 2 + 6i,\ (4 + 2i)\,x - (2 + 3i)\,y = 5 + 4i$;

b) $(2 + i)\,x + (2 - i)\,y = 6,\ (3 + 2i)\,x + (3 - 2i)\,y = 8$;

c) $x + yi - 2z = 10,\ x - y + 2iz = 20,\ ix + 3iy - (1 + i)\,z = 30.$

10. Calculer

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

***11.** Soit $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Calculer

a) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$;

b) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$;

c) $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$;

d) $(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)$.

12. Trouver les nombres conjugués:
a) de leur carré, b) de leur cube.

***13.** Démontrer le théorème:

Si en effectuant un nombre fini d'opérations rationnelles (addition, soustraction, multiplication et division) sur les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on obtient le nombre u, en effectuant les mêmes opérations sur les nombres conjugués $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, on obtient le nombre $\bar{u}$ conjugué de u.

14. Démontrer que $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$ si $x+yi=(s+ti)^n$

15. Calculer

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$;

e) $\sqrt{-3-4i}$; f) $\sqrt{-11+60i}$; g) $\sqrt{-8+6i}$;

h) $\sqrt{-8-6i}$; i) $\sqrt{8-6i}$; j) $\sqrt{8+6i}$; k) $\sqrt{2-3i}$;

l) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$; m) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; n) $\sqrt[4]{-1}$;

o) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

16. $\sqrt{a+bi}=\pm(\alpha+\beta i)$. Calculer $\sqrt{-a-bi}$.

17. Résoudre les équations:

a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;

b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$;

c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

***18.** Résoudre les équations suivantes et décomposer leurs premiers membres en facteurs à coefficients réels:

a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$;

b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

19. Résoudre les équations:

a) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

20. Etablir, pour résoudre l'équation bicarrée $x^4 + px^2 + q = 0$ à coefficients réels, une formule commode pour le cas $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

§ 2. Nombres complexes sous forme trigonométrique

21. Construire les points représentant les nombres complexes

$1, \quad -1, \quad -\sqrt{2}, \quad i, \quad -i, \quad i\sqrt{2}, \quad -1+i, \quad 2-3i.$

22. Représenter sous forme trigonométrique les nombres suivants:

a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$;

f) $-1+i$; g) $-1-i$;

h) $1-i$; i) $1+i\sqrt{3}$; j) $-1+i\sqrt{3}$; k) $-1-i\sqrt{3}$;

l) $1-i\sqrt{3}$; m) $2i$; n) -3; o) $\sqrt{3}-i$; p) $2+\sqrt{3}+i$.

23. A l'aide des tables représenter sous forme trigonométrique les nombres suivants:

a) $3+i$; b) $4-i$; c) $-2+i$; d) $-1-2i$.

24. Trouver le lieu géométrique des points représentant les nombres complexes:

a) dont le module est 1; b) dont l'argument est $\frac{\pi}{6}$.

25. Trouver le lieu géométrique des points représentant les nombres z satisfaisant aux inégalités:

a) $|z| < 2$; b) $|z-i| \leqslant 1$; c) $|z-1-i| < 1$.

26. Résoudre les équations:

a) $|x| - x = 1 + 2i$; b) $|x| + x = 2 + i$.

***27.** Démontrer l'identité:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2);$$

quel est le sens géométrique de cette identité?

***28.** Démontrer que tout nombre complexe z différent de -1 et dont le module est 1 peut être représenté sous la forme $z = \frac{1+ti}{1-ti}$, où t est un nombre réel.

29. Dans quelles conditions le module de la somme de deux nombres complexes est-il égal à la différence des modules des termes?

30. Dans quelles conditions le module de la somme de deux nombres complexes est-il égal à la somme des modules des termes ?

***31.** Soient z et z' deux nombres complexes, $u = \sqrt{zz'}$. Démontrer que

$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|.$$

32. Montrer que si $|z|<\frac{1}{2}$, on a

$$|(1+i)z^3+iz|<\frac{3}{4}.$$

33. Démontrer que

$$(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right].$$

34. Simplifier $\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi-i\sin\psi}$.

35. Calculer $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

36. Calculer

a) $(1+i)^{25}$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

***37.** Démontrer que

a) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$,

où n est un nombre entier.

***38.** Simplifier $(1+\omega)^n$, où $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

39. Supposant que $\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer $\omega_1^n+\omega_2^n$, où n est un nombre entier.

***40.** Calculer $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

***41.** Démontrer que si $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$, on a

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta.$$

42. Démontrer que $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

43. Extraire les racines:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[6]{1}$; e) $\sqrt[6]{-27}$.

44. S'aidant des tables, extraire les racines:

a) $\sqrt[3]{2+i}$; b) $\sqrt[3]{3-i}$; c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

45. Calculer

a) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; b) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; c) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

46. Sachant que β est l'une des valeurs de $\sqrt[n]{\alpha}$, écrire toutes les valeurs de $\sqrt[n]{\alpha}$.

47. Exprimer

a) $\cos 5x$; b) $\cos 8x$; c) $\sin 6x$; d) $\sin 7x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

48. Exprimer $\operatorname{tg} 6\varphi$ en fonction de $\operatorname{tg} \varphi$.

49. Etablir les formules exprimant $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

50. Représenter sous forme de polynôme du premier degré des fonctions trigonométriques des angles multiples de x:

a) $\sin^3 x$; b) $\sin^4 x$; c) $\cos^5 x$; d) $\cos^6 x$.

***51.** Démontrer que

a) $2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m$;

b) $2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum\limits_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)x$;

c) $2^{2m}\sin^{2m} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m$;

d) $2^{2m}\sin^{2m+1} x = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin(2m-2k+1)x$.

***52.** Démontrer que

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} - \ldots +$$
$$+ (-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{p!}(2\cos x)^{m-2p} + \ldots$$

***53.** Exprimer $\dfrac{\sin mx}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$.

***54.** Trouver les sommes:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$;

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

*55. Démontrer que

a) $1+C_n^4+C_n^8+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

c) $C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

d) $C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

*56. Trouver la somme:

$$C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{9}C_n^5-\frac{1}{27}C_n^7+\ldots$$

57. Démontrer que $(x+a)^m+(x+a\omega)^m+(x+a\omega^2)^m=3x^m+$ $+3C_m^3x^{m-3}a^3+\ldots+3C_m^nx^{m-n}a^n$, où $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ et n est le plus grand nombre entier, multiple de 3 et non supérieur à m.

58. Démontrer que

a) $1+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

b) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

c) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

59. Calculer les sommes:

a) $1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\ldots+a^k\cos k\varphi$;

b) $\sin\varphi+a\sin(\varphi+h)+a^2\sin(\varphi+2h)+\ldots+a^k\sin(\varphi+kh)$;

c) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$.

60. Montrer que

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

61. Trouver

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

62. Démontrer que si n est un nombre entier positif et θ un angle satisfaisant à la condition $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2n}$, on a

$$\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\ldots+\cos\frac{2n-1}{2}\theta=n\sin n\theta.$$

63. Montrer que

a) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$;

b) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$;

c) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}$.

64. Trouver les sommes:

a) $\cos a-\cos(a+h)+\cos(a+2h)-\ldots$
$\ldots+(-1)^{n-1}\cos[a+(n-1)h]$;

b) $\sin a-\sin(a+h)+\sin(a+2h)-\ldots$
$\ldots+(-1)^{n-1}\sin[a+(n-1)h]$.

65. Démontrer que si x est inférieur à l'unité en valeur absolue, les séries

a) $\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+x^2\cos(\alpha+2\beta)+\ldots$
$\ldots+x^n\cos(\alpha+n\beta)+\ldots$,

b) $\sin\alpha+x\sin(\alpha+\beta)+x^2\sin(\alpha+2\beta)+\ldots$
$\ldots+x^n\sin(\alpha+n\beta)+\ldots$

convergent et leurs sommes sont respectivement égales à

$$\frac{\cos\alpha-x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2},\quad\frac{\sin\alpha-x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2}.$$

66. Trouver les sommes:

a) $\cos x+C_n^1\cos 2x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x$;

b) $\sin x+C_n^1\sin 2x+\ldots+C_n^n\sin(n+1)x$.

67. Trouver les sommes:

a) $\cos x-C_n^1\cos 2x+C_n^2\cos 3x-\ldots$
$\ldots+(-1)^n C_n^n\cos(n+1)x$;

b) $\sin x-C_n^1\sin 2x+C_n^2\sin 3x-\ldots$
$\ldots+(-1)^n C_n^n\sin(n+1)x$.

***68.** $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont les vecteurs représentant respectivement 1 et i. On abaisse de O la perpendiculaire OA_2 sur A_1B; de A_2 la perpendiculaire A_2A_3 sur OA_1; de A_3 la perpendiculaire A_3A_4 sur A_1A_2 et ainsi de suite, d'après la règle: on abaisse de A_n la perpendiculaire A_nA_{n+1} sur $A_{n-2}A_{n-1}$. Trouver la limite de la somme

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots$$

***69.** Trouver la somme:

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2 (2n-1)\, x.$$

70. Montrer que:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos (n+1)\, x \sin nx}{2 \sin x}$;

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos (n+1)\, x \sin nx}{2 \sin x}$.

***71.** Trouver les sommes:

a) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \ldots + \cos^3 nx$;

b) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \ldots + \sin^3 nx$.

***72.** Trouver les sommes:

a) $\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \ldots + n \cos nx$;

b) $\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \ldots + n \sin nx$.

73. Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ pour $\alpha = a + bi$.

74. Définition: $e^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$. Démontrer

a) $e^{2\pi i} = 1$; b) $e^{\pi i} = -1$;

c) $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta$; d) $(e^\alpha)^k = e^{\alpha k}$,

où k est un nombre entier.

§ 3. Equations du troisième et du quatrième degré

75. Résoudre par la formule de Cardan les équations:

a) $x^3 - 6x + 9 = 0$; b) $x^3 + 12x + 63 = 0$;

c) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$; d) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$;

e) $x^3 - 6x + 4 = 0$; f) $x^3 + 6x + 2 = 0$;

g) $x^3 + 18x + 15 = 0$; h) $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$;

i) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$; j) $x^3 + 9x - 26 = 0$;

k) $x^3 + 24x - 56 = 0$; l) $x^3 + 45x - 98 = 0$;

m) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$; n) $x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0$;

o) $x^3 + 3x - 2i = 0$; p) $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$;
q) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$;
r) $x^3 - 3abfgx + f^2ga^3 + fg^2b^3 = 0$;
s) $x^3 - 4x - 1 = 0$; t) $x^3 - 4x + 2 = 0$.

***76.** A l'aide de la formule de Cardan, démontrer que

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

si x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

(L'expression $-4p^3 - 27q^2$ est appelée le discriminant de l'équation $x^3 + px + q = 0$.)

***77.** Résoudre l'équation:

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0.$$

***78.** Etablir la formule permettant de résoudre l'équation:

$$x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - 2b = 0.$$

79. Résoudre les équations:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$;
c) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$;
d) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$;
e) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$;
f) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 27x - 56 = 0$;
g) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$;
h) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$;
i) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0$;
j) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$;
k) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$;
l) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$;
m) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$;
n) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$;
o) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$;
p) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 - 8x + 4 = 0$;
q) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$;
r) $x^4 - x^3 + 2x - 1 = 0$;
s) $4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$;
t) $4x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$.

80. La méthode de Ferrari servant à résoudre l'équation du quatrième degré $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ consiste à représenter le premier membre de l'équation sous la forme

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} + \lambda - b\right)x^2 + \left(\frac{a\lambda}{2} - c\right)x + \left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right)\right]$$

et à choisir ensuite λ tel que l'expression entre crochets soit le carré d'un binôme du premier degré. Pour cela il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{a\lambda}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + \lambda - b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right) = 0,$$

autrement dit que λ soit la racine d'une équation cubique auxiliaire. Trouvant λ on décompose le premier membre de l'équation en facteurs.

Exprimer les racines de l'équation auxiliaire en fonction des racines de l'équation du quatrième degré.

§ 4. Racines de l'unité

81. Ecrire les racines de l'unité d'ordre

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

82. Ecrire les racines primitives d'ordre:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

83. A quel exposant appartiennent:

a) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{180} + i\sin\frac{2k\pi}{180}$ si $k = 27,\ 99,\ 137$;

b) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{144} + i\sin\frac{2k\pi}{144}$ si $k = 10,\ 35,\ 60$?

84. Ecrire toutes les racines d'ordre 28 de l'unité appartenant à l'exposant 7.

85. Pour chaque racine de l'unité d'ordre a) 16, b) 20, c) 24 indiquer l'exposant auquel elle appartient.

86. Ecrire les « polynômes circulaires » $X_n(x)$ pour n égal à

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 8; i) 9; j) 10; k) 11; l) 12; m) 15; n) 105.

***87.** Soit ε une racine primitive d'ordre $2n$ de l'unité. Calculer la somme

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}.$$

***88.** Trouver la somme de toutes les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

***89.** Trouver la somme des puissances k de toutes les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

90. Dans l'expression $(x+a)^m$ remplacer successivement a par les m racines $m^{\text{èmes}}$ de l'unité et additionner les résultats obtenus.

*91. Calculer $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\ldots+n\varepsilon^{n-1}$, où ε est la racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

*92. Calculer $1+4\varepsilon+9\varepsilon^2+\ldots+n^2\varepsilon^{n-1}$, où ε est la racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

93. Trouver les sommes:

a) $\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$;

b) $\sin\frac{2\pi}{n}+2\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+(n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

*94. Déterminer la somme des racines primitives de l'unité d'ordre: a) 15, b) 24, c) 30.

95. Trouver les racines d'ordre 5 de l'unité en résolvant algébriquement l'équation $x^5-1=0$.

96. A l'aide du résultat du problème 95, écrire sin 18° et cos 18°.

*97. Etablir l'équation algébrique la plus simple dont la racine représente la longueur d'un polygone régulier de 14 côtés, inscrit dans le cercle de rayon unité.

*98. Décomposer x^n-1 en facteurs du premier et du second degré à coefficients réels.

*99. Utiliser le résultat du problème 98 pour démontrer les formules:

a) $\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$;

b) $\sin\frac{\pi}{2m+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m+1}\ldots\sin\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$.

*100. Démontrer que

$$\prod_{k=0}^{n-1}(a+b\varepsilon_k)=a^n+(-1)^{n-1}b^n,$$

où

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

*101. Démontrer que

$$\prod_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k^2-2\varepsilon_k\cos\theta+1)=2(1-\cos n\theta)$$

si

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

102. Démontrer que

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(t+\varepsilon_k)^n-1}{t}=\prod_{k=1}^{n-1}[t^n-(\varepsilon_k-1)^n],$$

où

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

***103.** Trouver tous les nombres complexes satisfaisant à la condition $\bar{x} = x^{n-1}$, où $\bar{x}$ est le nombre conjugué de x.

104. Montrer que les racines de l'équation $\lambda(z-a)^n + \mu(z-b)^n = 0$, où λ, μ, a, b sont complexes (n est un nombre naturel), se trouvent sur une même circonférence qui peut dégénérer en ligne droite dans un cas particulier.

***105.** Résoudre les équations:

a) $(x+1)^m - (x-1)^m = 0$; b) $(x+i)^m - (x-i)^m = 0$;

c) $x^n - nax^{n-1} - C_n^2 a^2 x^{n-2} - \ldots - a^n = 0$.

106. Démontrer que si A est un nombre complexe dont le module est 1, les racines de l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A$ sont toutes réelles et distinctes.

***107.** Résoudre l'équation

$$\cos\varphi + C_n^1\cos(\varphi+\alpha)\,x + C_n^2\cos(\varphi+2\alpha)\,x^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n\cos(\varphi+n\alpha)\,x^n = 0.$$

Démontrer les théorèmes suivants:

108. Le produit d'une racine d'ordre a de l'unité et d'une racine d'ordre b de l'unité est une racine d'ordre ab de l'unité.

109. Si a et b sont premiers entre eux, alors $x^a - 1$ et $x^b - 1$ ont une seule racine commune.

110. Si a et b sont premiers entre eux, alors toutes les racines d'ordre ab de l'unité s'obtiennent en multipliant les racines d'ordre a de l'unité par les racines d'ordre b de l'unité.

111. Si a et b sont premiers entre eux, le produit d'une racine primitive d'ordre a de l'unité par une racine primitive d'ordre b de l'unité est une racine primitive d'ordre ab de l'unité et inversement.

112. Désignant par $\varphi(n)$ le nombre de racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, démontrer que $\varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$ si a et b sont premiers entre eux.

***113.** Démontrer que si $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers différents, on a

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

114. Montrer que le nombre de racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est pair si $n > 2$.

115. Ecrire le polynôme $X_p(x)$, où p est un nombre premier.

***116.** Ecrire le polynôme $X_{p^m}(x)$, où p est un nombre premier.

*117. Démontrer que pour n impair, plus grand que 1, on a $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

118. Démontrer que si d est formé des diviseurs simples de n, chaque racine primitive d'ordre nd de l'unité est une racine d'ordre d de la racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité et inversement.

*119. Démontrer que si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, où $p_1, p_2, \ldots \ldots p_k$ sont des nombres premiers différents, on a $X_n(x) = X_{n'}(x^{n''})$, où

$$n' = p_1 p_2 \ldots p_k\,; \quad n'' = \frac{n}{n'}\,.$$

*120. Désignant par $\mu(n)$ la somme des racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, démontrer que $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'au moins un nombre premier; $\mu(n) = 1$ si n est le produit d'un nombre pair de différents nombres premiers; $\mu(n) = -1$ si n est le produit d'un nombre impair de différents nombres premiers.

121. Démontrer que $\sum \mu(d) = 0$ si d parcourt tous les diviseurs du nombre n pour $n \neq 1$.

*122. Démontrer que $X_n(x) = \Pi\,(x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, où d parcourt tous les diviseurs de n.

*123. Trouver $X_n(1)$.

*124. Trouver $X_n(-1)$.

*125. Déterminer la somme des produits des racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, prises deux par deux.

*126. $S = 1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^9 + \ldots + \varepsilon^{(n-1)^2}$, où ε est la racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Trouver $|S|$.

Chapitre 2

CALCUL DES DÉTERMINANTS

§ 1. Déterminants du deuxième et du troisième ordre

Calculer les déterminants:

127. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

m) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; n) $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$,

où $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

o) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$,

où $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

128. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, où $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$, où $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

§ 2. Permutations

129. Ecrire les transpositions permettant de passer de la permutation 1, 2, 4, 3, 5 à la permutation 2, 5, 3, 4, 1.

130. Supposant que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 est la permutation initiale, déterminer le nombre d'inversions dans les permutations:

a) 1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5; b) 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4;
c) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

131. Supposant que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 est la permutation initiale, choisir i et k tels que:

a) la permutation 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 soit paire;
b) la permutation 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7 soit impaire.

***132.** Déterminer le nombre d'inversions dans la permutation n, $n-1$, . . ., 2, 1 si la permutation initiale est 1, 2, . . ., n.

***133.** La permutation $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ présente I inversions. Combien d'inversions contient la permutation $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?

134. Déterminer le nombre d'inversions dans les permutations:

a) 1, 3, 5, 7, . . ., $2n-1$, 2, 4, 6, . . ., $2n$;
b) 2, 4, 6, 8, . . ., $2n$, 1, 3, 5, . . ., $2n-1$,

si la permutation initiale est 1, 2, . . ., $2n$.

135. Déterminer le nombre d'inversions dans les permutations:

a) 3, 6, 9, . . ., $3n$, 1, 4, 7, . . ., $3n-2$, 2, 5, . . ., $3n-1$;
b) 1, 4, 7, . . ., $3n-2$, 2, 5, . . ., $3n-1$, 3, 6, . . ., $3n$.

si la permutation initiale est 1, 2, 3, . . ., $3n$.

136. Démontrer que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est une permutation présentant I inversions, après avoir rétabli la permutation initiale les numéros $1, 2, \ldots, n$ forment une permutation présentant le même nombre d'inversions, à savoir I.

137. Déterminer la parité de la permutation des lettres t, r, m, i, a, g, o, l si leur ordre initial est celui des mots:

a) logarithme; b) algorithme.

Comparer et expliquer les résultats.

§ 3. Définition du déterminant

138. Quels sont les signes des produits

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

dans le déterminant du sixième ordre ?

139. Les produits

a) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$; b) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$

entrent-ils dans la composition du déterminant du cinquième ordre ?

140. Choisir i et k tels que le produit $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ entre dans la composition du déterminant du cinquième ordre avec le signe plus.

141. Relever tous les termes intervenant dans la composition du déterminant du quatrième ordre avec le signe moins et comportant le facteur a_{23}.

142. Relever tous les termes du déterminant du cinquième ordre de la forme $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. Qu'adviendra-t-il si dans leur somme on met $a_{14}a_{23}$ en facteur ?

143. Quel est le signe du produit des éléments de la diagonale principale dans un déterminant d'ordre n ?

144. Quel est le signe du produit des éléments de la deuxième diagonale dans un déterminant d'ordre n ?

***145.** S'appuyant uniquement sur la définition du déterminant, démontrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est nul.

146. S'aidant uniquement de la définition du déterminant, calculer les coefficients de x^4 et x^3 dans l'expression:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

147. Calculer les déterminants :

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & a & a & \ldots & a \\ 0 & 2 & a & \ldots & a \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

R e m a r q u e. Si des conditions du problème l'ordre du déterminant n'apparaît pas clairement et s'il n'y a pas de mention spéciale, convenons d'admettre cet ordre égal à n.

148. $F(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$.

Calculer les déterminants:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} F(0) & F(1) & F(2) & \ldots & F(n) \\ F(1) & F(2) & F(3) & \ldots & F(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F(n) & F(n+1) & F(n+2) & \ldots & F(2n) \end{vmatrix};$$

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} F(a) & F''(a) & F'(a) & \ldots & F^{(n)}(a) \\ F'(a) & F''(a) & F'''(a) & \ldots & F^{(n+1)}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(n)}(a) & F^{(n+1)}(a) & F^{(n+2)}(a) & \ldots & F^{(2n)}(a) \end{vmatrix}.$$

§ 4. Propriétés fondamentales des déterminants

***149.** Démontrer que le déterminant d'ordre n, dont chaque élément a_{ik} est le complexe conjugué de l'élément a_{ki}, est un nombre réel.

***150.** Démontrer qu'un déterminant d'ordre impair est nul si tous ses éléments vérifient la condition

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

(déterminant antisymétrique).

151. Le déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ est égal à Δ.

A quoi est égal le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{vmatrix}?$$

152. Comment varie le déterminant si l'on écrit toutes ses colonnes dans l'ordre inverse?

***153.** Quelle est la valeur de la somme

$$\sum \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \dots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \dots & a_{2\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \dots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

si la sommation est étendue à toutes les permutations $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$?

***154.** Résoudre les équations

a) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sont tous distincts.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0;$$

c) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0.$$

***155.** Les nombres 204, 527, 255 sont divisibles par 17. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 17.

***156.** Calculer le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

157. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

158. Simplifier le déterminant $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$, en le développant suivant ses termes.

159. Trouver la somme des cofacteurs de tous les éléments des déterminants :

a) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & a_2 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

160. Développer par rapport aux éléments de sa troisième ligne et calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

161. Développer par rapport aux éléments de sa dernière colonne et calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

162. Développer par rapport aux éléments de sa première colonne et calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 5. Calcul des déterminants

Calculer les déterminants :

***163.** $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$. **164.** $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

165. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **166.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$. **167.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

168. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$. **169.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

170. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **171.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. **172.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

173. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$. **174.** $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$.

175. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$. **176.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

177. $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$.

178. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$. ***179.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

***180.** $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

***181.** $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}.$$

***182.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

***183.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

***184.** $$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

***185.** $$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

***186.** $$\begin{vmatrix} a & -(a+h) & \dots & (-1)^{n-1}[a+(n-1)h] \\ a & a & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

***187.** $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-2}^3 & \dots & C_{n-2}^{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

*188. $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

*189. $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

*190. Calculer la différence $f(x+1)-f(x)$, où

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \dots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

Calculer les déterminants:

*191.

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

*192.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

193. $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$.

*194. $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

*195. $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$.

*196. $\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \dots & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h \end{vmatrix}$.

*197. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$.

*198. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

*199. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

***200.**
$$\begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix}$$
(l'ordre est $n+1$).

***201.**
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***202.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***203.**
$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

***204.**
$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2a+b & (a+b)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+3b & (a+2b)^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2a(2n-1)b & (a+nb)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2a+(2n+1)b \end{vmatrix}$$

***205.**

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

***206.**

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

207. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

***208.** $$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \dots & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \dots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

209. $$\begin{vmatrix} a^n-\alpha & a^{n+1}-\alpha & \dots & a^{n+p-1}-\alpha \\ a^{n+p}-\alpha & a^{n+p+1}-\alpha & \dots & a^{n+2p-1}-\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n+p(p-1)}-\alpha & a^{n+p(p-1)+1}-\alpha & \dots & a^{n+p^2-1}-\alpha \end{vmatrix}.$$

210. Démontrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

est nul si $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$, $f_n(x)$ sont des polynômes en x, de degré non supérieur à $n-2$, et les nombres a_1, a_2, $\dots$, a_n sont arbitraires.

Calculer les déterminants:

***211.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

***212.** $$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

***213.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$. ***214.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

***215.** $\begin{vmatrix} n!\,a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!\,a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

216. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$. Ecrire le déterminant d'ordre n de structure semblable et le calculer.

Calculer les déterminants:

217. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$. **218** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

***219.** $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

220. $\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

***221.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$. ***222**. $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}$.

***223.** $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

224. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a_1+1 \\ 1 & 1 & \dots & a_2+1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1}+1 & \dots & 1 & 1 \\ a_n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***225.** $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

***226.** $$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

***227.** $$\begin{vmatrix} x_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & x_2 & a_3b_2 & \dots & a_nb_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & x_3 & \dots & a_nb_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

***228.** $$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

229. Résoudre l'équation :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n-\alpha_n x \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}x & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1-\alpha_1 x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=0.$$

Calculer les déterminants :

***230.** $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \text{ (d'ordre } 2n).$$

***231.** $\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \dots & -(n-1)\,b \\ 1 & (n-1)\,a & a & -3b & \dots & -(n-1)\,b \\ 1 & (n-2)\,a & a & a & \dots & -(n-1)\,b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}.$

***232.** $\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$

***233.** $\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_1a_2 & & a_1a_n \\ a_1a_2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_2a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$

***234.**

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

***235.**

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

***236.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$

***237.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$

***238.** $\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}.$

***239.** Démontrer que

$$\begin{vmatrix} a_{00}x^n & a_{01}x^{n-1} & a_{02}x^{n-2} & \dots & a_{0n} \\ a_{10}x & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20}x^2 & a_{21}x & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0}x^n & a_{n1}x^{n-1} & a_{n2}x^{n-2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x^n \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Calculer les déterminants:

***240.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***241.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}.$$

***242.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***243.**

$$\begin{vmatrix} C_m^k & C_m^{k+1} & \dots & C_m^{k+n} \\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \dots & C_{m+1}^{k+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m+n}^k & C_{m+n}^{k+1} & \dots & C_{m+n}^{k+n} \end{vmatrix}.$$

***244.**

$$\begin{vmatrix} C_{k+m}^m & C_{k+m+1}^m & \dots & C_{k+2m}^m \\ C_{k+m+1}^m & C_{k+m+2}^m & & C_{k+2m+1}^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{k+2m}^m & C_{k+2m+1}^m & & C_{k+3m}^m \end{vmatrix}.$$

***245.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

***246.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & \dots & x^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

***247.**

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & & \alpha+(n-1)\delta \\ \alpha & 2\alpha+\delta & 3\alpha+3\delta & 4\alpha+6\delta & & C_n^1\alpha+C_n^2\delta \\ \alpha & 3\alpha+\delta & 6\alpha+4\delta & 10\alpha+10\delta & \dots & C_{n+1}^2\alpha+C_{n+1}^3\delta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & C_n^{n-1}\alpha+\delta & C_{n+1}^{n-1}\alpha+C_{n+1}^n\delta & C_{n+2}^{n-1}\alpha+C_{n+2}^n\delta & \dots & C_{2n-2}^{n-1}\alpha+C_{2n-2}^n\delta \end{vmatrix}.$$

***248.**
$$\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}.$$

***249.**
$$\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & 0 \\ a & a & a & \dots & 0 & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & 0 & b & \dots & b & b \\ 0 & b & b & \dots & b & b \end{vmatrix}.$$

250. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ & & & \cdot & \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

251. $\begin{vmatrix} c_1 & a & a & \dots & a & 1 \\ b & c_2 & a & \dots & a & 1 \\ b & b & c_3 & \dots & a & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & c_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

***252.** $\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}$.

***253.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

***254.** $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a \\ a+2h & a+3h & a+4h & \dots & a+h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-2)h \end{vmatrix}$.

255. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

***256.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

257. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}$.

***258** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$.

***259.** $\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \cos^{n-2}\varphi_1 & \dots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2 & \cos^{n-2}\varphi_2 & \dots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \cos^{n-2}\varphi_n & \dots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}$.

260. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_n \\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^2\varphi_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$.

261. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

262. $$\begin{vmatrix} (a_1+x)^n & (a_1+x)^{n-1} & \dots & a_1+x & 1 \\ (a_2+x)^n & (a_2+x)^{n-1} & \dots & a_2+x & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ (a_{n+1}+x)^n & (a_{n+1}+x)^{n-1} & \dots & a_{n+1}+x & 1 \end{vmatrix}.$$

263. $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

*264. $$\begin{vmatrix} w_1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ w_2 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ w_n & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

*265. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

266.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+\sin\varphi_1 & 1+\sin\varphi_2 & \dots & 1+\sin\varphi_n \\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_n+\sin^2\varphi_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ \sin^{n-2}\varphi_1+\sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-2}\varphi_2+\sin^{n-1}\varphi_2 & \dots & \sin^{n-2}\varphi_n+\sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

267. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

où $\varphi_k(x) = x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$.

268. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ F_1(\cos\varphi_1) & F_1(\cos\varphi_2) & \ldots & F_1(\cos\varphi_n) \\ F_2(\cos\varphi_1) & F_2(\cos\varphi_2) & \ldots & F_2(\cos\varphi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n-1}(\cos\varphi_1) & F_{n-1}(\cos\varphi_2) & \ldots & F_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$$

où $F_k(x) = a_{0k}x^k + a_{1k}x^{k-1} + \ldots + a_{kk}$.

***269.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \ldots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & & \binom{x_n}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \ldots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix},$$

où $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$.

***270.** Démontrer que la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entiers, est divisible par $1^{n-1}2^{n-2}\ldots(n-1)$.

Calculer les déterminants:

***271.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \ldots & n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

***272.** $$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \ldots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***273.** $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \ldots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \ldots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \ldots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

274. $$\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_1\cos^{n-2}\alpha_1 & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_2\cos^{n-2}\alpha_2 & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \sin\alpha_n\cos^{n-2}\alpha_n & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

*275.

$$\begin{vmatrix} a_1^{2n}+1 & a_1^{2n-1}+a_1 & a_1^{2n-2}+a_1^2 & \dots & a_1^{n+1}+a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^{2n}+1 & a_2^{2n-1}+a_2 & a_2^{2n-2}+a_2^2 & \dots & a_2^{n+1}+a_2^{n-1} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^{2n}+1 & a_{n+1}^{2n-1}+a_{n+1} & a_{n+1}^{2n-2}+a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n+1}+a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

*276.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 & \dots & \cos(n-1)\varphi_0 \\ 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_{n-1} & \cos 2\varphi_{n-1} & \dots & \cos(n-1)\varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

*277.

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 & \dots & \sin\alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n & \dots & \sin\alpha_n \end{vmatrix}.$$

*278.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \dots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_n^2(x_n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

*279.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

*280.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

281.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & \dots & x_n^{s-1} \\ x_1^{s+1} & x_2^{s+1} & \dots & x_n^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***282.**
$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

283.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}.$$

284.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}.$$

***285.**
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & (n+1)x^n \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & (n+1)^2x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{n-1}x & 3^{n-1}x^2 & \dots & (n+1)^{n-1}x^n \\ 1 & y & y^2 & & y^n \end{vmatrix}.$$

***286.**
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & nx^{n-1} \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & n^2x^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{k-1}x & 3^{k-1}x^2 & \dots & n^{k-1}x^{n-1} \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-k} & y_{n-k}^2 & \dots & y_{n-k}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***287.**
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1x & \dots & C_{n-1}^1x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-1}^2x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{k-1}x^{n-k} \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1y & \dots & C_{n-1}^1y^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-k-1}y^k \end{vmatrix}.$$

288.
a) Développer le déterminant du quatrième ordre par rapport aux mineurs des deux premières lignes.

b) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

en utilisant le développement par rapport aux mineurs du deuxième ordre.

c) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

en utilisant le développement par rapport aux mineurs du deuxième ordre.

d) Calculer le déterminant du problème nº 145.

Calculer les déterminants:

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \\ x_1 & \alpha & \beta & \ldots & \beta & y_1 \\ x_2 & \beta & \alpha & \ldots & \beta & y_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ x_n & \beta & \beta & \ldots & \alpha & y_n \\ a & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$.

i) En utilisant le théorème de Laplace, calculer le déterminant du problème nº 230.

j) En appliquant le théorème de Laplace, calculer le déterminant du problème nº 171.

k) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

l) Soient A, B, C, D les déterminants du troisième ordre, formés à partir du tableau

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

par élimination respectivement de la première, deuxième, troisième et quatrième colonne. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC.$$

*m) Calculer le déterminant du quinzième ordre

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Delta_1 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_1 & \Delta \end{vmatrix},$$

formé de façon indiquée à l'aide des cellules

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & x & x & -x & -x \\ x & 2a & a & 0 & 0 \\ x & a & 2a & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 2a & a \\ -x & 0 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Multiplication des déterminants

289. Utilisant la règle de multiplication des matrices, représenter sous forme de déterminant les produits des déterminants:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

290. Calculer le déterminant Δ en le multipliant par le déterminant δ:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$

b) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix};$

c) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

291. Calculer le carré du déterminant :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$

292. Soit donné le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0,\,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,0} & a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix} = D.$$

A quoi est égal

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

où $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{n-1,\,i}x^{n-1}$?

Appliquer le résultat obtenu à la résolution des problèmes nos 265, 267, 268.

Calculer les déterminants:

*293.

a) $\begin{vmatrix} (b_0+a_0)^n & (b_1+a_0)^n & \dots & (b_n+a_0)^n \\ (b_0+a_1)^n & (b_1+a_1)^n & \dots & (b_n+a_1)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_0+a_n)^n & (b_1+a_n)^n & \dots & (b_n+a_n)^n \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} \frac{1-\alpha_1^n\beta_1^n}{1-\alpha_1\beta_1} & \frac{1-\alpha_1^n\beta_2^n}{1-\alpha_1\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_1^n\beta_n^n}{1-\alpha_1\beta_n} \\ \frac{1-\alpha_2^n\beta_1^n}{1-\alpha_2\beta_1} & \frac{1-\alpha_2^n\beta_2^n}{1-\alpha_2\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_2^n\beta_n^n}{1-\alpha_2\beta_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \frac{1-\alpha_n^n\beta_1^n}{1-\alpha_n\beta_1} & \frac{1-\alpha_n^n\beta_2^n}{1-\alpha_n\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_n^n\beta_n^n}{1-\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}$.

*294. $\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$.

*295. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$,

où $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

*296. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & l & m & n & p \\ b & -a & -d & -c & m & -l & p & -n \\ c & d & -a & -b & n & -p & -l & m \\ d & -c & b & -a & p & n & -m & -l \\ l & -m & -n & -p & -a & b & c & d \\ m & l & p & -n & -b & -a & d & -c \\ n & -p & l & m & -c & -d & -a & b \\ p & n & -m & l & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}$.

*297. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 2\cos 2\varphi & 2\sin 2\varphi \\ \cos 3\varphi & \sin 3\varphi & 3\cos 3\varphi & 3\sin 3\varphi \\ \cos 4\varphi & \sin 4\varphi & 4\cos 4\varphi & 4\sin 4\varphi \end{vmatrix}$.

*298.

$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & n\cos n\varphi & \sin n\varphi & n\sin n\varphi \\ \cos(n+1)\varphi & (n+1)\cos(n+1)\varphi & \sin(n+1)\varphi & (n+1)\sin(n+1)\varphi \\ \cos(n+2)\varphi & (n+2)\cos(n+2)\varphi & \sin(n+2)\varphi & (n+2)\sin(n+2)\varphi \\ \cos(n+3)\varphi & (n+3)\cos(n+3)\varphi & \sin(n+3)\varphi & (n+3)\sin(n+3)\varphi \end{vmatrix}$$

*299.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix},$$

où $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

*300.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

(déterminant cyclique).

301. Appliquer le résultat du problème n° 300 au déterminant

$$\begin{vmatrix} x & u & z & y \\ y & x & u & z \\ z & y & x & u \\ u & z & y & x \end{vmatrix}.$$

302. Appliquer le résultat du problème n° 300 aux problèmes n^{os} 192, 205, 255.

Calculer les déterminants:

303. $$\begin{vmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & 1 \\ 1 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2} \\ C_{n-1}^{n-2} & 1 & 1 & \dots & C_{n-1}^{n-4} & C_{n-1}^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

304. $$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & (n-1)a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

305. $$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \dots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \dots & s-a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s-a_2 & s-a_3 & \dots & s-a_1 \end{vmatrix},$$

où $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

306. $$\begin{vmatrix} t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & \ldots & C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & \ldots & C_n^{n-3} t^2 & C_n^{n-2} t \\ C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} & t^{n-1} & \ldots & C_n^{n-4} t^3 & C_n^{n-3} t^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & C_n^3 t^{n-4} & \ldots & C_n^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix}.$$

307. $$\begin{vmatrix} \overbrace{-1 & -1 & \ldots & -1 & -1}^{p} & \overbrace{1 & 1 & \ldots & 1}^{n-p} \\ 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 \end{vmatrix}.$$

***308.** $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \ldots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \ldots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \ldots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \ldots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

309. $$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \ldots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \ldots & \cos(n-1)\theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \ldots & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

310.
$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \ldots & \sin[a+(n-1)h] \\ \sin[a+(n-1)h] & \sin a & \sin(a+h) & \ldots & \sin[a+(n-2)h] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \sin(a+3h) & \ldots & \sin a \end{vmatrix}.$$

***311.** $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \ldots & (n-1)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots & 1^2 \end{vmatrix}.$$

312. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0 + 3a_1 + 3a_2)(a_0^2 - a_0a_1 - a_0a_2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_1a_2)^3.$$

313. Calculer le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

(déterminant anticyclique).

***314.** Démontrer que le déterminant cyclique d'ordre $2n$ peut être représenté sous la forme du produit d'un déterminant cyclique d'ordre n par un déterminant anticyclique d'ordre n.

315. Calculer le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \mu a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \mu a_{n-1} & \mu a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu a_2 & \mu a_3 & \mu a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

§ 7. Problèmes divers

316. Démontrer que si

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

on a alors

$$\Delta'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\dots$$

$$\dots+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

317. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+x\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik},$$

où A_{ik} est le cofacteur de l'élément a_{ik}.

318. Utilisant le résultat du problème n° 317, calculer les déterminants des problèmes nos 200, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 232, 233, 248, 249, 250.

319. Démontrer que la somme des cofacteurs de tous les éléments du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est égale à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-a_{n-1,\,1} & a_{n2}-a_{n-1,\,2} & \dots & a_{nn}-a_{n-1,\,n} \end{vmatrix}.$$

Démontrer les théorèmes:

320. La somme des cofacteurs de tous les éléments du déterminant n'est pas modifiée si à chaque élément du déterminant on ajoute un même nombre.

321. Si tous les éléments d'une ligne (d'une colonne) du déterminant sont égaux à l'unité, la somme des cofacteurs de tous les éléments du déterminant est égale à la valeur du déterminant.

322. Calculer la somme des cofacteurs de tous les éléments du déterminant du problème n° 250.

*323. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

324. Désignant par P_n et Q_n les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

démontrer que

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}.$$

Calculer les déterminants:

*325.

$$\begin{vmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix}.$$

326.

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & p & q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p \end{vmatrix}.$$

*327. Représenter le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

sous forme de polynôme ordonné suivant les puissances de x.

*328. Calculer le déterminant d'ordre $(2n-1)$ si les $(n-1)$ premiers éléments de sa diagonale principale sont égaux à l'unité et les éléments restants de la diagonale principale à n. Dans chacune des $(n-1)$ premières lignes n éléments se trouvant à droite de la diagonale principale sont égaux à l'unité, dans chacune des n dernières lignes les éléments se trouvant à gauche de la diagonale principale sont égaux à $n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$. Les autres éléments du déterminant sont nuls.

Par exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Calculer les déterminants:

***329.** $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -n & x-2 & 2 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-4 & 3 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & x-2n \end{vmatrix}.$$

330. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & x \end{vmatrix}.$$

331. $$\begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n(a-1) & x-1 & 2a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)(a-1) & x-2 & 3a & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a-1 & x-n \end{vmatrix}.$$

332. $$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \ldots & (n+1)^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \ldots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

333. $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \ldots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

334. Trouver le coefficient de la plus petite puissance de x dans le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} (1+x)^{a_1b_1} & (1+x)^{a_1b_2} & \ldots & (1+x)^{a_1b_n} \\ (1+x)^{a_2b_1} & (1+x)^{a_2b_2} & \ldots & (1+x)^{a_2b_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (1+x)^{a_nb_1} & (1+x)^{a_nb_2} & \ldots & (1+x)^{a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

Chapitre 3

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

§ 1. Théorème de Cramer

Résoudre les systèmes d'équations:

335. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$

336. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$

337. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11. \end{aligned}$

338. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$

339. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4. \end{aligned}$

340. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8. \end{aligned}$

341. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5. \end{aligned}$

342. $\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5. \end{aligned}$

343. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6. \end{aligned}$

344.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 0. \end{aligned}$$

345.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16. \end{aligned}$$

346.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 &= 0. \end{aligned}$$

347.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

348.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2. \end{aligned}$$

349.
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

350.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5. \end{aligned}$$

351.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3. \end{aligned}$$

352. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3. \end{aligned}$$

353. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Vérifier que le système a pour solution $x_1 \quad x_2 = x_3 - x_4 = 1$, et calculer le déterminant du système.

354. Démontrer que le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &\quad 0, \\ bx - ay + dz - ct &= 0, \\ cx - dy - az + bt &= 0, \\ dx + cy - bz - at &= 0 \end{aligned}$$

possède une solution unique si a, b, c, d sont réels et non tous égaux à zéro.

Résoudre les systèmes d'équations:

355. $$\begin{aligned} \alpha x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_{n-1} + \beta x_n &= a_n, \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \beta x_{n-1} + \alpha x_n &= a_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_{n-1} + \alpha x_n &= a_1, \end{aligned}$$

où $\alpha \neq \beta$.

356. $$\begin{aligned} \frac{x_1}{b_1-\beta_1} + \frac{x_2}{b_1-\beta_2} + \ldots + \frac{x_n}{b_1-\beta_n} &= 1, \\ \frac{x_1}{b_2-\beta_1} + \frac{x_2}{b_2-\beta_2} + \ldots + \frac{x_n}{b_2-\beta_n} &= 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{x_1}{b_n-\beta_1} + \frac{x_2}{b_n-\beta_2} + \ldots + \frac{x_n}{b_n-\beta_n} &= 1, \end{aligned}$$

où les $b_1, b_2, \ldots, b_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont tous distincts.

357. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 1, \\ x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n &= t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1\alpha_1^{n-1} + x_2\alpha_2^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} &= t^{n-1}, \end{aligned}$$

où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont tous distincts.

358. $x_1+x_2\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_1^{n-1}=u_1,$

$x_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_2^{n-1}=u_2,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1+x_2\alpha_n+\ldots+x_n\alpha_n^{n-1}=u_n,$

où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont tous distincts.

359. $x_1+x_2+\ldots+x_n=u_1,$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=u_2,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1\alpha_1^{n-1}+x_2\alpha_2^{n-1}+\ldots+x_n\alpha_n^{n-1}=u_n,$

où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont tous distincts.

360. $1+x_1+x_2+\ldots+x_n=0,$

$1+2x_1+2^2x_2+\ldots+2^nx_n=0,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1+nx_1+n^2x_2+\ldots+n^nx_n=0.$

§ 2. Rang d'une matrice

361. Combien de déterminants d'ordre k peut-on former à partir d'une matrice à m lignes et n colonnes ?

362. Former une matrice dont le rang est égal à: a) 2; b) 3.

363. Démontrer que le rang d'une matrice ne change pas si

a) on remplace les lignes par les colonnes;

b) on multiplie les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un nombre non nul;

c) on permute deux lignes ou deux colonnes;

d) on ajoute aux éléments d'une ligne (ou colonne) les éléments d'une autre ligne (ou colonne), multipliés par un nombre quelconque.

364. On appelle somme de deux matrices à un même nombre de lignes et de colonnes la matrice dont les éléments sont la somme des éléments correspondants des matrices qu'on ajoute. Démontrer que le rang de la somme des deux matrices n'est pas supérieur à la somme des rangs des matrices qu'on additionne.

365. Comment varie le rang de la matrice si on lui adjoint: a) une colonne; b) deux colonnes ?

Calculer le rang des matrices:

366.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

367.

$$\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}.$$

368.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

369.
$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

370.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

371.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

372.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

373.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

374.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

375.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

376.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

377.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

378.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

379.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

380.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Systèmes de formes linéaires

381. a) Ecrire deux formes linéaires indépendantes.

b) Ecrire trois formes linéaires indépendantes.

382. Former un système de quatre formes linéaires à cinq indéterminées tel que deux de ces formes soient indépendantes et les autres représentent leurs combinaisons linéaires.

Trouver les relations principales entre les formes des systèmes:

383. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4, \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4. \end{aligned}$$

384. $$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4, \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4, \\ y_3 &= 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4. \end{aligned}$$

385. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4, \\ y_2 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4, \\ y_3 &= 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 8x_4, \\ y_4 &= 3x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 5x_4. \end{aligned}$$

386. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

387. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4, \\ y_2 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, \\ y_3 &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4, \\ y_4 &= 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \end{aligned}$$

388. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2, \\ y_2 &= 3x_1 + 2x_2, \\ y_3 &= x_1 + x_2, \\ y_4 &= 2x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

389. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5, \\ y_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + x_5, \\ y_4 &= x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + x_5. \end{aligned}$$

390. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4, \\ y_3 &= 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4, \\ y_4 &= 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4. \end{aligned}$$

391. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - 3x_3, \\ y_2 &= 3x_1 + x_2 - 5x_3, \\ y_3 &= 4x_1 + 2x_2 - x_3, \\ y_4 &= x_1 - 7x_3. \end{aligned}$$

392. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5, \\ y_2 &= x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5, \\ y_3 &= 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5, \\ y_4 &= x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5. \end{aligned}$$

393. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5, \\ y_3 &= 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5, \\ y_4 &= x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5. \end{aligned}$$

394. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5. \\ y_3 &= x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5, \\ y_4 &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5, \\ y_5 &= x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5. \end{aligned}$$

395. $$\begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5, \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5, \\ y_3 &= x_1 - 3x_2 + x_4 - 2x_5, \\ y_4 &= x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5. \end{aligned}$$

396. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 - x_6, \\ y_3 &= 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6, \\ y_4 &= 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 15x_4 + 6x_5 - 5x_6, \\ y_5 &= 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 + 9x_6. \end{aligned}$$

397. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5, \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5, \\ y_4 &= 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + \lambda x_5. \end{aligned}$$

Choisir λ de manière que la quatrième forme soit la combinaison linéaire des trois premières.

§ 4. Systèmes d'équations linéaires

398. Résoudre le système d'équations:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5. \end{aligned}$$

399. Choisir λ de façon que le système d'équations

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

possède une solution.

Résoudre les systèmes d'équations:

400.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

401.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14. \end{aligned}$$

402.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 &= -6. \end{aligned}$$

403.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

404.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4. \end{aligned}$$

405.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6. \end{aligned}$$

406.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3. \end{aligned}$$

407.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 14. \end{aligned}$$

408.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0. \end{aligned}$$

409. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0,\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0,\\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0,\\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

410. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0,\\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0,\\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0. \end{aligned}$$

411. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2,\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23,\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12. \end{aligned}$$

412. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &\quad 0,\\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0,\\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0,\\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

413. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0,\\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0,\\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

414. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2,\\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3. \end{aligned}$$

415. $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1,\\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1,\\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= -1. \end{aligned}$$

416. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1,\\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2,\\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3,\\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 3. \end{aligned}$$

417.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 &= 1,\\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2,\\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 7,\\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 &= 25. \end{aligned}$$

418.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1,\\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3,\\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1. \end{aligned}$$

419.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1,\\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

420.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= -2,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 &= -3,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 10,\\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= -5,\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 1. \end{aligned}$$

421. Le système
$$\begin{aligned} ay + bx &= c,\\ cx + az &= b,\\ bz + cy &= a \end{aligned}$$
possède une solution unique. Démontrer que $abc \neq 0$ et trouver la solution.

Résoudre les systèmes d'équations:

422.
$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1,\\ x + \lambda y + z &= \lambda,\\ x + y + \lambda z &= \lambda^2. \end{aligned}$$

423.
$$\begin{aligned} \lambda x + y + z + t &= 1,\\ x + \lambda y + z + t &= \lambda,\\ x + y + \lambda z + t &= \lambda^2,\\ x + y + z + \lambda t &= \lambda^3. \end{aligned}$$

424.
$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= a^3,\\ x + by + b^2z &= b^3,\\ x + cy + c^2z &= c^3. \end{aligned}$$

425.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1,\\ ax + by + cz &= d,\\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2. \end{aligned}$$

426. $$\begin{aligned} ax + y + z &= 4,\\ x + by + z &= 3,\\ x + 2by + z &= 4. \end{aligned}$$

427. $$\begin{aligned} ax + by + z &= 1,\\ x + aby + z &= b,\\ x + by + az &= 1. \end{aligned}$$

428. $$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= m,\\ x + \alpha y + z &= n,\\ x + y + \alpha z &= p. \end{aligned}$$

429. $$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= 1,\\ x + ay + abz &= a,\\ bx + a^2y + a^2bz &= a^2b. \end{aligned}$$

430. $$\begin{aligned} (\lambda + 3)\, x + y + 2z &= \lambda,\\ \lambda x + (\lambda - 1)\, y + z &= 2\lambda,\\ 3\,(\lambda + 1)\, x + \lambda y + (\lambda + 3)z &= 3. \end{aligned}$$

431. $$\begin{aligned} \lambda x + \lambda y + (\lambda + 1)\, z &= \lambda,\\ \lambda x + \lambda y + (\lambda - 1)\, z &= \lambda,\\ (\lambda + 1)\, x + \lambda y + (2\lambda + 3)\, z &= 1. \end{aligned}$$

432. $$\begin{aligned} 3kx + (2k + 1)\, y + (k + 1)\, z &= k,\\ (2k - 1)\, x + (2k - 1)\, y + (k - 2)\, z &= k + 1,\\ (4k - 1)\, x + 3ky + 2kz &= 1. \end{aligned}$$

433. $$\begin{aligned} ax + by + 2z &= 1,\\ ax + (2b - 1)\, y + 3z &= 1,\\ ax + by + (b + 3)\, z &= 2b - 1. \end{aligned}$$

434. a) $$\begin{aligned} 3mx + (3m - 7)\, y + (m - 5)\, z &= m - 1,\\ (2m - 1)\, x + (4m - 1)\, y + 2mz &= m + 1,\\ 4mx + (5m - 7)\, y + (2m - 5)\, z &= 0. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} (2m + 1)\, x - my + (m + 1)\, z &= m - 1,\\ (m - 2)\, x + (m - 1)\, y + (m - 2)\, z &= m,\\ (2m - 1)\, x + (m - 1)\, y + (2m - 1)\, z &= m. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} (5\lambda + 1)\, x + 2\lambda y + (4\lambda + 1)\, z &= 1 + \lambda,\\ (4\lambda - 1)\, x + (\lambda - 1)\, y + (4\lambda - 1)\, z &= -1,\\ 2\,(3\lambda + 1)\, x + 2\lambda y + (5\lambda + 2)\, z &= 2 - \lambda. \end{aligned}$$

435. a) $$\begin{aligned} (2c + 1)\, x - cy - (c + 1)\, z &= 2c,\\ 3cx - (2c - 1)\, y - (3c - 1)\, z &= c + 1,\\ (c + 2)\, x - y - 2cz &= 2. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2\,(\lambda + 1)\, x + 3y + \lambda z &= \lambda + 4,\\ (4\lambda - 1)\, x + (\lambda + 1)\, y + (2\lambda - 1)\, z &= 2\lambda + 2,\\ (5\lambda - 4)\, x + (\lambda + 1)\, y + (3\lambda - 4)\, z &= \lambda - 1. \end{aligned}$$

c) $dx + (2d - 1)\,y + (d + 2)\,z = 1,$

$$(d - 1)\,y + (d - 3)\,z = 1 + d,$$

$$dx + (3d - 2)\,y + (3d + 1)\,z = 2 - d.$$

d) $$(3a - 1)\,x + 2ay + (3a + 1)\,z = 1,$$

$$2ax + 2ay + (3a + 1)\,z = a,$$

$$(a + 1)\,x + (a + 1)\,y + 2\,(a + 1)\,z = a^2.$$

436. Trouver l'équation de la droite passant par les points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

437. Dans quel cas les trois points $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ sont-ils situés sur une même droite ?

438. Dans quel cas les trois droites $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ passent-elles par un même point ?

439. Dans quel cas les quatre points $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ sont-ils situés sur une même circonférence ?

440. Ecrire l'équation de la circonférence passant par les points $M_1(2, 1)$; $M_2(1, 2)$; $M_3(0, 1)$.

441. Trouver l'équation de la courbe du second degré passant par les points $M_1(0, 0)$; $M_2(1, 0)$; $M_3(-1, 0)$; $M_4(1, 1)$ et $M_5(-1, 1)$.

442. Trouver l'équation de la parabole du troisième degré passant par les points $M_1(1, 0)$; $M_2(0, -1)$; $M_3(-1, -2)$ et $M_4(2, 7)$.

443. Etablir l'équation de la parabole du $n^{\text{ème}}$ degré $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ passant par $n + 1$ points $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $\ldots$; $M_n(x_n, y_n)$.

444. Dans quel cas les quatre points $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$; $M_4(x_4, y_4, z_4)$ sont-ils situés dans un même plan ?

445. Former l'équation de la sphère passant par les points $M_1(1, 0, 0)$; $M_2(1, 1, 0)$; $M_3(1, 1, 1)$; $M_4(0, 1, 1)$.

446. Dans quel cas n points $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$; $\ldots$; $M_n(x_n, y_n)$ sont-ils situés sur une même droite ?

447. Dans quel cas n droites $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $\ldots$; $a_nx + b_ny + c_n = 0$ passent-elles par un même point ?

448. Dans quel cas n points $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $\ldots$ $\ldots$; $M_n(x_n, y_n, z_n)$ sont-ils situés dans un même plan et dans quel cas ces mêmes points sont-ils situés sur une même droite ?

449. Dans quel cas n plans $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ passent-ils par un même point et dans quel cas tous ces plans passent-ils par une même droite ?

450. Eliminer $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ du système de n égalités:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,\,n-1}x_{n-1} + a_{1n} &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,\,n-1}x_{n-1} + a_{2n} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,\,n-1}x_{n-1} + a_{nn} &= 0. \end{aligned}$$

451. Soient

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} = \alpha_{11};\ x_2^{(1)} = \alpha_{12};\ \ldots;\ x_n^{(1)} = \alpha_{1n}, \\ x_1^{(2)} = \alpha_{21};\ x_2^{(2)} = \alpha_{22};\ \ldots;\ x_n^{(2)} = \alpha_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(m)} = \alpha_{m1};\ x_2^{(m)} = \alpha_{m2};\ \ldots;\ x_n^{(m)} = \alpha_{mn} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

m solutions d'un certain système d'équations linéaires homogènes. Ces solutions sont dites linéairement dépendantes s'il existe des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, non toutes nulles, telles que

$$c_1\alpha_{1i} + c_2\alpha_{2i} + \ldots + c_m\alpha_{mi} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Si par contre les égalités (2) ne sont possibles que pour $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, les solutions sont dites linéairement indépendantes.

Convenons d'écrire les solutions à l'aide des lignes de la matrice. Ainsi, le système de solutions (1) s'écrira à l'aide de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Démontrer que si le rang de la matrice A est égal à r, le système (1) possède r solutions linéairement indépendantes et les solutions restantes du système (1) sont leurs combinaisons linéaires.

452. Démontrer que si le rang du système de m équations linéaires homogènes à n inconnues est égal à r, il existe $(n - r)$ solutions linéairement indépendantes du système et toutes les autres solutions du système sont leurs combinaisons linéaires.

Un tel système de $(n - r)$ solutions est appelé système fondamental de solutions.

453. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

est-elle un système fondamental de solutions du système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0\,? \end{aligned}$$

454. Ecrire le système fondamental de solutions pour le système d'équations du problème n° 453.

455. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ représente-t-elle le système fondamental de solutions du système du problème n° 453 ?

456. Démontrer que si A est une matrice de rang r, formant un système fondamental de solutions d'un système d'équations linéaires homogènes et B une matrice non singulière d'ordre r, la matrice BA représente également un système fondamental de solutions du même système d'équations.

457. Démontrer que si deux matrices A et C de rang r sont des systèmes fondamentaux de solutions d'un système quelconque d'équations linéaires homogènes, l'une d'elles est le produit d'une matrice non singulière B d'ordre r par l'autre, autrement dit $A = BC$.

458. Soit $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}$ un système fondamental de solutions d'un système d'équations linéaires homogènes; démontrer que

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \ldots + c_r\alpha_{r1}, \\ x_2 &= c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} + \ldots + c_r\alpha_{r2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + \ldots + c_r\alpha_{rn} \end{aligned}$$

est la solution générale de ce système d'équations, c'est-à-dire que chaque solution du système peut en être obtenue pour certaines valeurs de $c_1, c_2, \ldots, c_r$ et inversement.

459. Ecrire la solution générale du système du problème n° 453.

460. Vérifier que (11 1—7) est le système fondamental de solutions du système du problème n° 403 et écrire la solution générale.

461. Ecrire les solutions générales des systèmes d'équations des problèmes n^{os} 408, 409, 410, 412, 413.

462. Connaissant la solution générale du système d'équations du problème n° 453 (cf. la réponse du problème n° 459) et sachant que $x_1 = -16$, $x_2 = 23$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ est une solution particulière du système 411, trouver la solution générale de ce dernier.

463. Ecrire les solutions générales des systèmes des problèmes n^{os} 406, 414, 415.

Chapitre 4

MATRICES

§ 1. Opérations sur les matrices carrées

464. Multiplier les matrices :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

465. Effectuer les opérations :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$

***466.** Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (α est un nombre réel).

5 Зак. 11769

467. Démontrer que si $AB = BA$, alors

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;

c) $(A+B)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-1}B + \ldots + B^n$.

468. Calculer $AB - BA$ si :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

469. Trouver toutes les matrices qui commutent avec la matrice A

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

470. Trouver $f(A)$:

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

471. Démontrer que chaque matrice du deuxième ordre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie l'équation

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

472. Démontrer que pour toute matrice donnée A on peut trouver un polynôme $f(x)$ tel que $f(A) = 0$. Tous les polynômes ayant cette propriété sont alors divisibles par l'un d'eux.

***473.** Démontrer que l'égalité $AB - BA = E$ est impossible.

474. Soit $A^k = 0$. Démontrer que $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$.

475. Trouver toutes les matrices du deuxième ordre dont les carrés sont égaux à la matrice nulle.

476. Trouver toutes les matrices du deuxième ordre dont les cubes sont égaux à la matrice nulle.

477. Trouver toutes les matrices du deuxième ordre dont les carrés sont égaux à la matrice unité.

478. Résoudre et étudier l'équation $XA = 0$, où la matrice donnée A et la matrice cherchée X sont toutes les deux du deuxième ordre.

479. Résoudre et étudier l'équation $X^2 = A$, où la matrice donnée A et la matrice cherchée X sont toutes les deux du deuxième ordre.

480. Trouver la matrice inverse de la matrice A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$;

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \ldots & \varepsilon^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2n-2} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$,

où $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$;

j) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

k) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 2n-1 \\ 2n-1 & 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-3 \\ 2n-3 & 2n-1 & 1 & 3 & \ldots & 2n-5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$;

l) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & c_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & c_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n & a \end{pmatrix}$;

m) $A = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & -x & \ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -x \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & & a_n \end{pmatrix}$;

n) $A = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1} & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{\lambda_2} & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{\lambda_3} & \ldots & 1 \\ & & & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$;

o) connaissant la matrice B^{-1}, trouver la matrice inverse de la matrice encadrée

$$\begin{pmatrix} B & U \\ V & a \end{pmatrix}.$$

481. Trouver la matrice inconnue X à partir des équations:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ . & . & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

482. Démontrer que si $AB = BA$, alors $A^{-1}B = BA^{-1}$.

483. Calculer $\varphi(A)$, où $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

484. Trouver toutes les matrices réelles du deuxième ordre dont les cubes sont égaux à la matrice unité.

485. Trouver toutes les matrices réelles du deuxième ordre dont la quatrième puissance est égale à la matrice unité.

486. Etablir l'isomorphisme du champ de nombres complexes et de l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ pour a, b réels.

487. Etablir que pour a, b, c, d réels, les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ constituent un anneau sans diviseurs de zéro.

488. Représenter $(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)$ sous la forme de la somme des quatre carrés des expressions bilinéaires.

489. Démontrer que les opérations suivantes sur les matrices:

a) l'échange de deux lignes,

b) l'addition aux éléments d'une ligne de nombres proportionnels aux éléments d'une autre ligne,

c) la multiplication des éléments d'une ligne par un nombre différent de zéro,

sont réalisées par multiplication à gauche de la matrice par certaines matrices non singulières.

Les mêmes opérations sur les colonnes s'effectuent par multiplication à droite.

490. Démontrer que chaque matrice peut être représentée sous la forme PRQ, où P et Q sont des matrices non singulières et la matrice R une matrice diagonale de la forme

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

***491.** Démontrer que chaque matrice peut être représentée sous forme de produit des matrices $E + \alpha e_{ik}$, où e_{ik} est une matrice dont l'élément à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est égal à 1 et dont tous les autres éléments sont nuls.

***492.** Démontrer que le rang du produit de deux matrices carrées d'ordre n n'est pas inférieur à $r_1 + r_2 - n$, où r_1 et r_2 sont les rangs des facteurs.

493. Démontrer que chaque matrice carrée de rang 1 est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \dots & \lambda_1\mu_n \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \dots & \lambda_2\mu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n\mu_1 & \lambda_n\mu_2 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

***494.** Trouver toutes les matrices du troisième ordre dont les carrés sont égaux à la matrice nulle.

***495.** Trouver toutes les matrices du troisième ordre dont les carrés sont égaux à la matrice unité.

***496.** Supposons que les matrices rectangulaires A et B possèdent le même nombre de lignes. Désignons par (A, B) la matrice qui s'obtient en adjoignant à la matrice A toutes les colonnes de la matrice B. Démontrer que rang $(A, B) \leqslant$ rang A + rang B.

***497.** Démontrer que si $A^2 = E$, alors rang $(E + A)$ + rang $(E - A) = n$, où n est l'ordre de la matrice A.

***498.** Démontrer que la matrice A possédant la propriété $A^2 = E$ peut être représentée sous la forme PBP^{-1}, où P est une matrice non singulière et B une matrice diagonale dont tous les éléments sont égaux à ± 1.

499. A quelle condition doit satisfaire la matrice à éléments entiers pour que tous les éléments de la matrice inverse soient entiers.

500. Démontrer que chaque matrice non singulière à éléments entiers peut être représentée sous la forme PR, où P est une matrice entière unimodulaire et R une matrice entière triangulaire dont tous les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls, les éléments diagonaux positifs et les éléments situés au-dessus de la diagonale principale non négatifs et inférieurs aux éléments diagonaux de la même colonne.

***501.** Réunissons dans une même classe toutes les matrices entières qui s'obtiennent les unes des autres par multiplication à gauche par des matrices entières unimodulaires. Calculer le nombre de classes de matrices d'ordre n à déterminant donné k.

502. Démontrer que chaque matrice entière peut être représentée sous la forme PRQ, où P et Q sont des matrices entières unimodulaires et R une matrice entière diagonale.

503. Démontrer que chaque matrice entière unimodulaire du deuxième ordre, dont le déterminant est 1, peut être représentée sous forme de produit des puissances (positives et négatives) des matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

504. Démontrer que chaque matrice entière unimodulaire du deuxième ordre peut être représentée sous forme de produit des puissances des matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

***505.** Démontrer que chaque matrice entière du troisième ordre, différente de la matrice unité, à déterminant positif et satisfaisant à la condition $A^2 = E$ peut être représentée sous la forme QCQ^{-1}, où Q est une matrice entière unimodulaire et C l'une des matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

§ 2. Matrices rectangulaires. Quelques inégalités

506. Multiplier les matrices:

a) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ et $(1\ \ 2\ \ 3)$; d) $(1\ \ 2\ \ 3)$ et $\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$.

507. Trouver le déterminant du produit de la matrice $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ par la matrice transposée.

508. Multiplier la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ par la matrice transposée et appliquer le théorème du déterminant du produit.

509. Exprimer le mineur d'ordre m du produit de deux matrices par les mineurs des facteurs.

510. Démontrer que tous les mineurs principaux (diagonaux) de la matrice $\bar{A}A$ sont non négatifs. A désigne ici une matrice réelle et $\bar{A}$ sa transposée.

511. Démontrer que si tous les mineurs principaux d'ordre k de la matrice $\bar{A}A$ sont nuls, les rangs des matrices $\bar{A}A$ et A sont inférieurs à k. Ici A est une matrice réelle et $\bar{A}$ sa transposée.

512. Démontrer que les sommes de tous les mineurs diagonaux d'ordre donné k, calculées pour les matrices $\bar{A}A$ et $A\bar{A}$, sont identiques.

513. Utilisant la multiplication des matrices rectangulaires, démontrer l'identité

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=\sum_{i<k}(a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

514. Démontrer l'identité

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i'\right|^2=\sum_{i<k}|a_ib_k-a_kb_i|^2.$$

Ici a_i, b_i sont des nombres complexes et b_i' les nombres conjugués de b_i.

515. Démontrer l'inégalité de Bouniakovski

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

pour a_i, b_i réels en se basant sur l'identité du problème nº 513.

516. Démontrer l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i'\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$$

pour a_i, b_i complexes.

***517.** Soient B et C deux matrices rectangulaires réelles telles que $(B, C) = A$ est une matrice carrée [la notation (B, C) a ici le même sens que dans le problème nº 496]. Démontrer que

$$|A|^2\leqslant|\bar{B}B|\cdot|\bar{C}C|.$$

***518.** Soit $A = (B, C)$ une matrice rectangulaire à éléments réels. Démontrer que

$$|\bar{A}A|\leqslant|\bar{B}B|\cdot|\bar{C}C|.$$

519. Soit A une matrice rectangulaire réelle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $|A\overline{A}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \dots \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2.$

520. Soit A une matrice rectangulaire à éléments complexes, A^* la matrice transposée d'une matrice complexe conjuguée de A. Démontrer que le déterminant de la matrice A^*A est un nombre réel non négatif et que ce déterminant est nul si et seulement si le rang de A est inférieur au nombre de colonnes.

521. Soit $A = (B, C)$ une matrice rectangulaire complexe. Démontrer que $|A^*A| \leqslant |B^*B| \cdot |C^*C|$.

522. Démontrer que si $|a_{ik}| \leqslant M$, le module du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n'est pas supérieur à $M^n n^{n/2}$.

***523.** Démontrer que si a_{ik} sont réels et appartiennent à l'intervalle $0 \leqslant a_{ik} \leqslant M$, la valeur absolue du déterminant, composé des nombres a_{ik}, ne dépasse pas $M^n 2^{-n} (n+1)^{\frac{n+1}{2}}$.

524. Démontrer que pour les déterminants à éléments complexes l'estimation rapportée au problème n° 522 est exacte et ne peut être améliorée.

525. Démontrer que pour les déterminants à éléments réels l'estimation rapportée au problème n° 522 est exacte pour $n = 2^m$.

526. Démontrer que le maximum de la valeur absolue des déterminants d'ordre n à éléments réels ne dépassant pas 1 en valeur absolue est un nombre entier divisible par 2^{n-1}.

***527.** Trouver le maximum de la valeur absolue des déterminants d'ordre 3 et 5, composés de nombres réels ne dépassant pas 1 en valeur absolue.

***528.** Nous appelons matrice complémentaire de la matrice donnée A la matrice dont les éléments sont des mineurs d'ordre $(n-1)$ de la matrice initiale dans l'ordre naturel. Démontrer que la matrice complémentaire de la matrice complémentaire est égale à la matrice initiale multipliée par son déterminant à la puissance $(n-2)$.

***529.** Démontrer que les mineurs d'ordre m de la matrice complémentaire sont égaux aux mineurs complémentaires des mineurs correspondants de la matrice initiale multipliés par Δ^{m-1}.

530. Démontrer que la matrice complémentaire du produit de deux matrices est égale au produit des matrices complémentaires prises dans le même ordre.

531. Supposons que l'on ait numeroté par un procédé quelconque toutes les combinaisons m par m des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Soit donnée une matrice carrée d'ordre n $A = (a_{ik})$. Soit $A_{\alpha\beta}$ un mineur d'ordre m de la matrice A, dont les numéros des lignes forment une combinaison avec le numéro α et les numéros des colonnes une combinaison avec le numéro β. Dans ce cas, on peut construire avec tous ces mineurs une matrice $A'_m = (A_{\alpha\beta})$ d'ordre C_n^m. En particulier, $A'_1 = A$, A'_{n-1} est une matrice complémentaire de la matrice A.

Démontrer que $(AB)'_m = A'_m B'_m$, $E'_m = E$, $(A^{-1})'_m = (A'_m)^{-1}$.

532. Démontrer que si A est une matrice «triangulaire» de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

la matrice A'_m sera elle aussi triangulaire lors d'une numérotation adéquate des combinaisons.

533. Démontrer que le déterminant de la matrice A'_m est égal à $|A|^{C_{n-1}^{m-1}}$.

534. Supposons que, par un procédé quelconque, on ait numéroté les couples (i, k); $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$. On appelle produit kroneckerien (ou produit tensoriel) de deux matrices carrées A et B respectivement d'ordre n et m la matrice $C = A \times B$ d'ordre nm d'éléments $c_{\alpha_1\alpha_2} = a_{i_1 i_2} b_{k_1 k_2}$, où α_1 est le numéro du couple (i_1, k_1), α_2 le numéro de (i_2, k_2). Démontrer que

a) $(A_1 \pm A_2) \times B = (A_1 \times B) \pm (A_2 \times B_2)$,

b) $A \times (B_1 \pm B_2) = (A \times B_1) \pm (A \times B_2)$,

c) $(A' \times B') \cdot (A'' \times B'') = (A' \cdot A'') \times (B' \cdot B'')$.

***535.** Démontrer que le déterminant de $A \times B$ est égal à $|A|^m \cdot |B|^n$.

536. Supposons que les matrices A et B d'ordre mn sont partagées en n^2 cellules carrées, de sorte qu'elles sont de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

où A_{ik} et B_{ik} sont des matrices carrées d'ordre m. Soit C leur produit que nous supposons partagé de la même manière en cellules C_{ik}.

Démontrer que

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \dots + A_{in}B_{nk}.$$

Par conséquent, la multiplication des matrices partagées en cellules s'effectue formellement d'après la même règle que dans le cas où les cellules auraient contenu non pas des matrices, mais des nombres.

*537. Supposons que la matrice C d'ordre mn est partagée en n^2 cellules carrées égales. Supposons que les matrices A_{ik} formées par les éléments de différentes cellules commutent deux par deux lors de la multiplication. On forme à partir des matrices A_{ik} le « déterminant » $\sum \pm A_{1\alpha_1}A_{2\alpha_2} \dots A_{n\alpha_n} = B$. Ce « déterminant » est une certaine matrice d'ordre m. Démontrer que le déterminant de la matrice C est égal au déterminant de la matrice B.

Chapitre 5

POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES D'UNE VARIABLE

§ 1. Opérations sur les polynômes. Formule de Taylor. Zéros multiples

538. Multiplier les polynômes:

a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$;

b) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$.

539. Effectuer la division avec reste:

a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ par $x^2 - 3x + 1$;

b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ par $3x^2 - 2x + 1$.

540. Dans quel cas le polynôme $x^3 + px + q$ est-il divisible par un polynôme de la forme $x^2 + mx - 1$?

541. Dans quel cas le polynôme $x^4 + px^2 + q$ est-il divisible par un polynôme de la forme $x^2 + mx + 1$?

542. Simplifier le polynôme

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

543. Effectuer la division avec reste:

a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ par $x - 1$;

b) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ par $x + 3$;

c) $4x^3 + x^2$ par $x + 1 + i$;

d) $x^3 - x^2 - x$ par $x - 1 + 2i$.

544. Utiliser le procédé de Hörner pour calculer $f(x_0)$:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$;

b) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $x_0 = -2 - i$.

545. Utiliser le procédé de Hörner pour développer le polynôme $f(x)$ suivant les puissances de $x - x_0$:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = -1$;

b) $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $x_0 = 2$;

d) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad x_0 = -i$;

e) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 -$
$- (33 - 20i)x + 7 + 18i, \qquad x_0 = -1 + 2i.$

546. Utiliser le procédé de Hörner pour décomposer en fractions simples:

a) $\frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$; b) $\frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$.

*547. A l'aide du procédé de Hörner développer suivant les puissances de x:

a) $f(x+3)$, où $f(x) = x^4 - x^3 + 1$;

b) $(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$.

548. Trouver les valeurs du polynôme $f(x)$ et de ses derivées pour $x = x_0$:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2$;

b) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1, \quad x_0 = 1 + 2i$.

549. Quel est l'ordre de multiplicité du zéro:

a) 2 pour le polynôme $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;

b) -2 pour le polynôme $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

550. Déterminer le coefficient a de manière que le polynôme $x^5 - ax^2 - ax + 1$ ait -1 pour zéro dont l'ordre de multiplicité ne soit pas inférieur à 2.

551. Déterminer A et B de manière que le trinôme $Ax^4 + Bx^3 + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$.

552. Déterminer A et B de manière que le trinôme $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$.

*553. Démontrer que pour les polynômes:

a) $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$;

b) $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$;

c) $(n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m)$,

le nombre 1 est un zéro triple.

554. Démontrer que le polynôme

$$x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2} + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1} -$$
$$- \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1} - 1$$

est divisible par $(x-1)^5$ et non divisible par $(x-1)^6$.

*555. Démontrer que pour que le polynôme

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

soit divisible par $(x-1)^{k+1}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \quad a_2 + \ldots + \quad a_n &= 0, \\ a_1 + \ 2a_2 + \ldots + \ na_n &= 0, \\ a_1 + \ 4a_2 + \ldots + n^2a_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 + 2^ka_2 + \ldots + n^ka_n &= 0. \end{aligned}$$

556. Déterminer l'ordre de multiplicité du zéro a du polynôme

$$\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)] - f(x) + f(a),$$

où $f(x)$ est un polynôme.

557. Trouver la condition pour laquelle le polynôme $x^5 + ax^3 + b$ possède un zéro double différent du nombre zéro.

558. Trouver la condition pour laquelle le polynôme $x^5 + 10ax^3 + 5bx + c$ possède un zéro triple différent du nombre zéro.

559. Démontrer que le trinôme $x^n + ax^{n-m} + b$ ne peut pas avoir de zéros, différents du nombre zéro, d'ordre de multiplicité supérieur à deux.

560. Trouver la condition pour laquelle le trinôme $x^n + ax^{n-m} + b$ possède un zéro double différent du nombre zéro.

*561. Démontrer que le polynôme à k termes

$$a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \ldots + a_kx^{p_k}$$

n'a pas de zéros, différents du nombre zéro, d'ordre de multiplicité supérieur à $(k-1)$.

*562. Démontrer que chaque zéro, différent du nombre zéro, d'ordre de multiplicité $(k-1)$ du polynôme

$$a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \ldots + a_kx^{p_k}$$

vérifie les équations

$$a_1x^{p_1}\varphi'(p_1) = a_2x^{p_2}\varphi'(p_2) = \ldots = a_kx^{p_k}\varphi'(p_k),$$

où

$$\varphi(t) = (t-p_1)(t-p_2)(t-p_3)\ldots(t-p_k),$$

et inversement.

*563. Démontrer que le polynôme est divisible par sa dérivée dans le cas et seulement dans le cas où il est égal à $a_0(x-x_0)^n$.

564. Démontrer que le polynôme

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

ne possède pas de zéros multiples.

565. Montrer que pour que x_0 soit un zéro d'ordre de multiplicité k du numérateur d'une fraction rationnelle $f(x)=\frac{\varphi(x)}{w(x)}$, dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x=x_0$, il faut et il suffit que

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0, \qquad f^k(x_0)\neq 0.$$

566. Démontrer que la fraction rationnelle $f(x)=\frac{\varphi(x)}{w(x)}$ peut être représentée sous la forme

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{F(x)}{w(x)}(x-x_0)^{n+1},$$

où $F(x)$ est un polynôme. On suppose que $w(x_0)\neq 0$ (formule de Taylor pour une fraction rationnelle).

*567. Démontrer que si x_0 est un zéro d'ordre de multiplicité k du polynôme $f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)$, alors x_0 est un zéro d'ordre de multiplicité $(k+1)$ du polynôme $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$ si ce dernier n'est pas identiquement nul, et inversement.

*568. Démontrer que si $f(x)$ n'a pas de zéros multiples, alors $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ n'a pas de zéros d'ordre de multiplicité supérieur à $(n-1)$, où n est le degré de $f(x)$.

*569. Construire un polynôme $f(x)$ de degré n, pour lequel $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ possède un zéro x_0, d'ordre de multiplicité $(n-1)$, que n'est pas un zéro de $f(x)$.

§ 2. Démonstration du théorème fondamental de l'algèbre supérieure et questions annexes

570. Déterminer δ de façon que pour $|x|<\delta$ le polynôme

$$x^5-4x^3+2x$$

soit inférieur en module à 0,1.

571. Déterminer δ de manière que $|f(x)-f(2)|<0{,}01$ pour tous les x vérifiant l'inégalité $|x-2|<\delta$; $f(x)=x^4-3x^3+$ $+4x+5$.

572. Déterminer M de manière que pour $|x|>M$ on ait

$$|x^4-4x^3+4x^2+2|>100.$$

573. Trouver x de façon que $|f(x)|<|f(0)|$, où

a) $f(x)=x^5-3ix^3+4$; b) $f(x)=x^5-3x^3+4$.

574. Trouver x de sorte que $|f(x)| < |f(1)|$, où:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$;

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$;

c) $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

575. Démontrer que si $z - i = a(1 - i)$, $0 < a < \frac{1}{2}$, alors

$$|f(z)| < \sqrt{5},$$

où

$$f(z) = (1 + i) z^5 + (3 - 5i) z^4 - (9 + 5i) z^3 - \\ - 7(1 - i) z^2 + 2(1 + 3i) z + 4 - i.$$

***576.** Démontrer que si $f(z)$ est un polynôme différent d'une constante, on peut trouver dans un voisinage aussi petit que l'on veut de z_0 un z_1 tel que $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

577. Démontrer le lemme de d'Alembert pour une fraction rationnelle.

578. Démontrer que le module d'une fraction rationnelle atteint sa borne inférieure lors de la variation de la variable indépendante dans un domaine rectangulaire fermé.

579. Il est évident que le théorème sur l'existence d'un zéro n'est pas valable pour une fraction rationnelle. Par exemple, la fonction $\frac{1}{z}$ n'a aucun zéro. Pourquoi la « démonstration » du théorème n'est-elle pas possible d'après le même schéma que pour le polynôme ?

***580.** Soit $f(x)$ un polynôme ou une fraction rationnelle. Démontrer que si a est un zéro de $f(z) - f(a)$ d'ordre de multiplicité k et $f(a) \neq 0$, il existe pour un ρ suffisamment petit sur la circonférence $|z - a| = \rho$ $2k$ points en lesquels $|f(z)| = |f(a)|$.

***581.** Démontrer que si a est un zéro de $f(z) - f(a)$ d'ordre de multiplicité k, on trouve pour un ρ suffisamment petit sur la circonférence $|z - a| = \rho$ $2k$ points en lesquels $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(a))$ et $2k$ points en lesquels $\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(a))$. Ici $f(z)$ est un polynôme ou une fraction rationnelle.

§ 3. Décomposition en facteurs linéaires. Décomposition en facteurs irréductibles dans le champ des nombres réels. Relations entre coefficients et zéros

582. Décomposer en facteurs linéaires les polynômes:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; b) $x^4 + 4$; c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$; d) $x^4 - 10x^2 + 1$.

*583. Décomposer en facteurs linéaires les polynômes:

a) $\cos(n \arc\cos x)$;

b) $(x+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(x+\cos\theta-i\sin\theta)^n$;

c) $x^m-C_{2m}^2x^{m-1}+C_{2m}^4x^{m-2}-\ldots+(-1)^mC_{2m}^{2m}$.

584. Décomposer en facteurs réels irréductibles les polynômes:

a) x^4+4; b) x^6+27; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;

d) $x^{2n}-2x^n+2$; e) x^4-ax^2+1, $-2<a<2$;

f) $x^{2n}+x^n+1$.

585. Construire les polynômes de degré le plus petit avec les zéros donnés:

a) zéro double 1, zéros simples 2, 3 et $1+i$;

b) zéro triple -1, zéros simples 3 et 4;

c) zéro double i, zéro simple $-1-i$.

586. Trouver le polynôme de degré le plus petit dont les zéros sont toutes les racines de l'unité dont la puissance ne dépasse pas n.

587. Construire le polynôme de degré le plus petit à coefficients réels avec les zéros donnés:

a) zéro double 1, zéros simples 2, 3 et $1+i$;

b) zéro triple $2-3i$;

c) zéro double i, zéro simple $-1-i$.

588. Trouver le plus grand commun diviseur des polynômes:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ et $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ et

$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ et $(x^2-1)^3$.

*589. Trouver le plus grand commun diviseur des polynômes

$$x^m-1 \text{ et } x^n-1.$$

590. Trouver le plus grand commun diviseur des polynômes

$$x^m+a^m \qquad \text{et} \qquad x^n+a^n.$$

591. Trouver le plus grand commun diviseur du polynôme et de sa dérivée:

a) $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-3)$;

b) $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$;

c) $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n+1$.

592. Le polynôme $f(x)$ n'a pas de zéros multiples. Démontrer que si x_0 est une racine d'ordre de multiplicité $k > 1$ de l'équation $f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = 0$, x_0 est aussi une racine d'ordre de multiplicité $(k-1)$ de l'équation $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right) = 0$.

On suppose que $v(x_0) \neq 0$, $v'(x_0) \neq 0$.

593. Démontrer que $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ est divisible par $x^2 + x + 1$.

594. Quand $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ est-il divisible par $x^2 - x + 1$?

595. Dans quel cas $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ est-il divisible par $x^4 + x^2 + 1$?

596. Dans quel cas $x^{2m} + x^m + 1$ est-il divisible par $x^2 + x + 1$?

597. Démontrer que

$$x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \ldots + x^{ka_k+k-1}$$

est divisible par $x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$.

598. Pour quelles valeurs de m $(x+1)^m - x^m - 1$ est-il divisible par $x^2 + x + 1$?

599. Pour quelles valeurs de m $(x+1)^m + x^m + 1$ est-il divisible par $x^2 + x + 1$?

600. Pour quelles valeurs de m $(x+1)^m - x^m - 1$ est-il divisible par $(x^2 + x + 1)^2$?

601. Pour quelles valeurs de m $(x+1)^m + x^m + 1$ est-il divisible par $(x^2 + x + 1)^2$?

602. Les polynômes $(x+1)^m + x^m + 1$ et $(x+1)^m - x^m - 1$ sont-ils divisibles par $(x^2 + x + 1)^3$?

603. Transformer le polynôme

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

en donnant à x successivement les valeurs 1, 2, . . ., n. (Comparer avec le problème n° 542.)

604. Pour quelles valeurs de m $X_n(x^m)$ est-il divisible par $X_n(x)$? (X_n est un polynôme circulaire.)

Démontrer les théorèmes :

605. Si $f(x^n)$ est divisible par $x - 1$, il l'est aussi par $x^n - 1$.

606. Si $f(x^n)$ est divisible par $(x-a)^k$, il est aussi divisible par $(x^n - a^n)^k$, pour $a \neq 0$.

607. Si $F(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ est divisible par $x^2 + x + 1$, alors $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont divisibles par $x - 1$.

***608.** Si le polynôme $f(x)$ à coefficients réels vérifie l'inégalité $f(x) \geqslant 0$ pour toutes les valeurs réelles de x, alors $f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + [\varphi_2(x)]^2$, où $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont des polynômes à coefficients réels.

609. $x_1, \ldots, x_n$ sont les zéros du polynôme $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Quels sont les zéros des polynômes:

a) $a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$;

b) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$;

c) $f(a) + \frac{f'(a)}{1}x + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$;

d) $a_0x^n + a_1bx^{n-1} + a_2b^2x^{n-2} + \ldots + a_nb^n$?

610. Trouver la relation entre les coefficients de l'équation du troisième degré $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, pour laquelle l'une des racines est égale à la somme de deux autres.

611. Vérifier que l'une des racines de l'équation $36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ est égale à la somme de deux autres et résoudre cette équation.

612. Trouver la relation entre les coefficients de l'équation du quatrième degré $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, pour laquelle la somme de deux racines est égale à la somme de deux autres racines.

613. Démontrer que l'équation vérifiant la condition du problème n° 612 peut être ramenée à une équation bicarrée par la substitution $x = y + \alpha$, pour un choix approprié de α.

614. Trouver une relation entre les coefficients de l'équation du quatrième degré $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ telle que lorsqu'elle est vérifiée, le produit de deux racines est égal au produit de deux autres racines.

615. Démontrer que l'équation vérifiant la condition du problème n° 614 peut être résolue en effectuant la division par x^2 et la substitution $y = x + \frac{c}{ax}$ (pour $a \neq 0$).

616. Résoudre les équations:

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$;

b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$;

c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$;

d) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$,

en utilisant les problèmes n^{os} 612-615.

617. Déterminer λ de manière que l'une des racines de l'équation $x^3 - 7x + \lambda = 0$ soit égale au double d'une autre racine.

618. Déterminer a, b, c de sorte qu'ils représentent les racines de l'équation

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

619. Déterminer a, b, c de sorte qu'ils soient les racines de l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

620. La somme de deux racines de l'équation

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$$

est égale à 1. Déterminer λ.

621. Déterminer une relation entre les coefficients de l'équation $x^3 + px + q = 0$, telle que lorsqu'elle est vérifiée, on a $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

622. Trouver la somme des carrés des zéros du polynôme

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

***623.** Résoudre l'équation

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

si les coefficients a_1 et a_2 sont connus et si les racines de cette équation forment une progression arithmétique.

624. Les racines des équations

a) $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0;$

b) $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 2x - 2 = 0$

forment-elles des progressions arithmétiques ?

625. Soit donnée la courbe

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Trouver une droite telle que ses points d'intersection M_1, M_2, M_3, M_4 avec la courbe découpent trois segments égaux: $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$. Dans quel cas ce problème a une solution ?

***626.** Former une équation du 4ème degré dont les racines sont α, $\frac{1}{\alpha}$, $-\alpha$, $-\frac{1}{\alpha}$.

***627.** Former une équation du 6ème degré dont les racines sont:

$$\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1-\alpha, \frac{1}{1-\alpha}, 1-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

628. Soit $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Trouver $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ et démontrer que

$$\frac{\partial f'(x_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{2} f''(x_i).$$

629. Démontrer que si $f(x_1) = f''(x_1) = 0$, mais $f'(x_1) \neq 0$, on a

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{x_1 - x_i} = 0.$$

630. Les zéros du polynôme $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ forment une progression arithmétique. Déterminer $f'(x_i)$.

§ 4. Algorithme d'Euclide

631. Déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes:

a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ et $x^3 + x^2 - x - 1$;

b) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ et $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

c) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ et $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

d) $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ et
$3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$;

e) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ et $x^5 + x^2 - x + 1$;

f) $x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ et
$x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$;

g) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ et
$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;

h) $x^4 - 10x^2 + 1$ et $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;

i) $x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$ et
$x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$;

j) $x^4 - 4x^3 + 1$ et $x^3 - 3x^2 + 1$;

k) $2x^6 - 5x^5 - 14x^4 + 36x^3 + 86x^2 + 12x - 31$ et
$2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 37x^2 + 10x - 14$;

l) $3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$ et
$3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$.

632. Utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver les polynômes $M_1(x)$ et $M_2(x)$ pour lesquels $f_1(x)\,M_2(x) + f_2(x)\,M_1(x) = \delta(x)$, où $\delta(x)$ est le plus grand commun diviseur de $f_1(x)$ et $f_2(x)$:

a) $f_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$,
$f_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

b) $f_1(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$,
$f_2(x) = x^4 + 2x^3 + x - 2$;

c) $f_1(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$,
$f_2(x) = x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$;

d) $f_1(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$,
$f_2(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$;

e) $f_1(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$,
$f_2(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$;

f) $f_1(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$,
$f_2(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.

633. Utilisant l'algorithme d'Euclide trouver les polynômes $M_1(x)$ et $M_2(x)$ pour lesquels $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $f_2(x)=x^2-x+1$;

b) $f_1(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_2(x)=x^2-x-1$;

c) $f_1(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12$,
$f_2(x)=x^3-5x^2-3x+17$;

d) $f_1(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$,
$f_2(x)=2x^3+x^2-x-1$;

e) $f_1(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$,
$f_2(x)=3x^3-2x^2+x-1$;

f) $f_1(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$,
$f_2(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

634. Chercher par la méthode des coefficients indéterminés les polynômes $M_1(x)$ et $M_2(x)$ pour lesquels $f_1(x)M_2(x)+$ $+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=x^4-4x^3+1$, $f_2(x)=x^3-3x^2+1$;

b) $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=(1-x)^2$;

c) $f_1(x)=x^4$, $f_2(x)=(1-x)^4$.

635. Chercher les polynômes de degré le plus petit $M_1(x)$ et $M_2(x)$ pour lesquels

a) $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)M_1(x)+$
$+(x^3-5x-3)M_2(x)=x^4$;

b) $(x^4+2x^3+x+1)M_1(x)+$
$+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)M_2(x)=x^3-2x$.

636. Déterminer le polynôme de degré le plus petit donnant comme reste:

a) $2x$ lors de la division par $(x-1)^2$ et $3x$ lors de la division par $(x-2)^3$;

b) x^2+x+1 lors de la division par $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ et $2x^2-3$ lors de la division par $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$.

***637.** Trouver les polynômes $M(x)$ et $N(x)$ pour lesquels

$$x^m M(x)+(1-x)^n N(x)=1.$$

638. Soit $f_1(x)M(x)+f_2(x)N(x)=\delta(x)$, où $\delta(x)$ est le plus grand commun diviseur de $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Quel est le plus grand commun diviseur de $M(x)$ et $N(x)$?

639. Séparer les facteurs multiples des polynômes:

a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;

b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;

c) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;

d) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;

e) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$;

f) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;

g) $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

§ 5. Problème d'interpolation et fraction rationnelle

640. Utilisant la méthode de Newton, construire le polynôme de degré le plus petit d'après la table des valeurs:

a) $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 6 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{array}$;

c) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & \frac{9}{4} & 4 & \frac{25}{4} \\ \hline f(x) & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \end{array}$; trouver $f(2)$; d) $\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline f(x) & 5 & 6 & 1 & -4 & 10 \end{array}$.

641. En utilisant la formule de Lagrange construire un polynôme d'après la table des valeurs:

a) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & i & -1 & -i \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$.

***642.** Trouver $f(x)$ d'après la table des valeurs:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_{n-1} \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{array}, \qquad \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

643. Le polynôme $f(x)$, dont le degré n'est pas supérieur à $(n-1)$, prend les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pour les valeurs de x égales aux racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Trouver $f(0)$.

***644.** Démontrer le théorème: pour que l'on ait

$$f(x) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

pour tout polynôme $f(x)$, dont le degré n'est pas supérieur à $(n-1)$, il faut et il suffit que les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient situés sur une circonférence de centre en x_0 et divisent celle-ci en parties égales.

***645.** Démontrer que si les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du polynôme $\varphi(x)$ sont tous distincts, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant n-2.$$

646. Trouver la somme $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}$ (les notations sont les mêmes que dans le problème n° 645).

647. Etablir la formule d'interpolation de Lagrange en résolvant le système d'équations:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} &= y_n. \end{aligned}$$

*648. Construire le polynôme de degré le plus petit d'après la table des valeurs

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 \ldots & n \\ \hline y & 1 & 2 & 4 \ldots & 2^n \end{array}.$$

*649. Construire le polynôme de degré le plus petit d'après la table des valeurs

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & \ldots n \\ \hline y & 1 & a & a^2 & \ldots a^n \end{array}.$$

*650. Trouver le polynôme de degré $2n$ qui, lorsqu'on le divise par $x(x-2)\ldots(x-2n)$, donne 1 pour reste et -1 lorsqu'on le divise par $(x-1)(x-3)\ldots[x-(2n-1)]$.

*651. Construire le polynôme de degré le plus petit d'après la table des valeurs

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \hline y & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n} \end{array}.$$

*652. Trouver le polynôme de degré non supérieur à $(n-1)$ vérifiant la condition $f(x) = \frac{1}{x-a}$ aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \neq a$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

*653. Démontrer que le polynôme de degré $k \leqslant n$, qui prend des valeurs entières pour $(n+1)$ valeurs entières successives de la variable indépendante, les prend pour toutes les valeurs entières de la variable indépendante.

*654. Démontrer que le polynôme du $n^{\text{ème}}$ degré, qui prend des valeurs entières pour $x = 0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, les prend pour tous les carrés des nombres naturels.

*655. Décomposer en fractions simples de première espèce:

a) $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; b) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

c) $\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$; d) $\frac{x^2}{x^4-1}$; e) $\frac{1}{x^3-1}$;

f) $\frac{1}{x^4+4}$; g) $\frac{1}{x^n-1}$; h) $\frac{1}{x^n+1}$;

i) $\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$;

j) $\frac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\dots(x^2-n^2)}$; k) $\frac{1}{\cos(n \arccos x)}$.

*656. Décomposer en fractions simples réelles de première et de deuxième espèces :

a) $\frac{1}{x^3-1}$; b) $\frac{x^2}{x^4-16}$; c) $\frac{1}{x^4+4}$; d) $\frac{x^2}{x^6+27}$;

e) $\frac{x^m}{x^{2n+1}-1}$, $m<2n+1$;

f) $\frac{x^m}{x^{2n+1}+1}$, $m<2n+1$;

g) $\frac{1}{x^{2n}-1}$; h) $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$;

i) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\dots(x^2+n^2)}$.

*657. Décomposer en fractions simples de première espèce :

a) $\frac{x}{(x^2-1)^2}$; b) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$; c) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$;

d) $\frac{1}{(x^n-1)^2}$; e) $\frac{1}{x^m(1-x)^n}$; f) $\frac{1}{(x^2-a^2)^n}$, $a\neq 0$;

g) $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$; h) $\frac{g(x)}{[f(x)]^2}$,

où $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ est un polynôme qui n'a pas de zéros multiples et $g(x)$ un polynôme dont le degré est inférieur à $2n$.

658. Décomposer en fractions simples réelles de première et de deuxième espèces :

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; b) $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

c) $\frac{1}{(x^4-1)^2}$; d) $\frac{1}{(x^{2n}-1)^2}$.

659. Soit

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Exprimer en fonction de $\varphi(x)$ les sommes :

a) $\sum\frac{1}{x-x_i}$; b) $\sum\frac{x_i}{x-x_i}$; c) $\sum\frac{1}{(x-x_i)^2}$.

***660.** Calculer les sommes suivantes, sachant que $x_1, x_2, \ldots$ sont les zéros du polynôme $\varphi(x)$:

a) $\dfrac{1}{2-x_1}+\dfrac{1}{2-x_2}+\dfrac{1}{2-x_3}$, $\varphi(x)=x^3-3x-1$;

b) $\dfrac{1}{x_1^2-3x_1+2}+\dfrac{1}{x_2^2-3x_2+2}+\dfrac{1}{x_3^2-3x_3+2}$,

$$\varphi(x)=x^3+x^2-4x+1;$$

c) $\dfrac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\dfrac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\dfrac{1}{x_3^2-2x_3+1}$, $\varphi(x)=x^3+x^2-1$.

661. Déterminer le polynôme du premier degré qui admet approximativement la table des valeurs

x	0	1	2	3	4
y	2,1	2,5	3,0	3,6	4,1

et minimise la somme des carrés des erreurs.

662. Déterminer le polynôme du deuxième degré qui admet approximativement la table des valeurs

x	0	1	2	3	4
y	1	1,4	2	2,7	3,6

et minimise la somme des carrés des erreurs.

§ 6. Zéros rationnels des polynômes. Réductibilité et irréductibilité dans le champ des nombres rationnels

663. Démontrer que si $\frac{p}{q}$ est une fraction rationnelle irréductible, représentant l'un des zéros du polynôme $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ à coefficients entiers, alors:

1) q est un diviseur de a_0;
2) p est un diviseur de a_n;
3) $p - mq$ est un diviseur de $f(m)$ pour tout m entier. En particulier, $p - q$ est un diviseur de $f(1)$, $p + q$ un diviseur de $f(-1)$.

664. Trouver les zéros rationnels des polynômes:

a) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$; b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

c) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;

d) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

e) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;

f) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

g) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$;

h) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

i) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$;

k) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$; l) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$;

m) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$;

n) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$;

o) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

*665. Démontrer que le polynôme $f(x)$ à coefficients entiers ne possède pas de zéros entiers si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs.

*666. Démontrer que si le polynôme à coefficients entiers admet les valeurs ± 1 pour deux valeurs entières x_1 et x_2 de la variable indépendante, il n'a pas de zéros rationnels pour $|x_1 - x_2| > 2$. Si par contre $|x_1 - x_2| \leqslant 2$, seul $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ peut être un zéro rationnel.

*667. Démontrer l'irréductibilité des polynômes en utilisant le critère d'Eisenstein:

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

*668. Démontrer l'irréductibilité du polynôme

$$X_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}, \qquad \text{où } p \text{ est un nombre premier.}$$

*669. Démontrer l'irréductibilité du polynôme

$$X_{p^k}(x) = \frac{x^{p^k} - 1}{x^{p^{k-1}} - 1}, \qquad \text{où } p \text{ est un nombre premier.}$$

*670. Démontrer que le polynôme $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ à coefficients entiers, qui n'a pas de zéros rationnels, est irréductible s'il existe un nombre premier p tel que a_0 n'est pas divisible par p, $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont divisibles par p et a_n n'est pas divisible par p^2.

*671. Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients entiers pour lequel il existe un nombre premier p tel que a_0 n'est pas divisible par p, $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ sont divisibles par p et a_n n'est pas divisible par p^2. Démontrer que dans ce cas $f(x)$ possède un facteur irréductible de degré $\geqslant n - k$.

672. Par la méthode de décomposition en facteurs des valeurs d'un polynôme pour des valeurs entières de la variable décomposer en facteurs les polynômes ou démontrer leur irréductibilité:

a) $x^4 - 3x^2 + 1$; b) $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x + 1$;

c) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$; d) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

673. Démontrer qu'un polynôme du troisième degré est irréductible s'il n'a pas de zéros rationnels.

674. Démontrer que le polynôme du quatrième degré $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ à coefficients entiers est irréductible s'il n'a pas de zéros entiers et n'est divisible par aucun des polynômes de la forme

$$x^2 + \frac{cm - am^2}{d - m^2} x + m,$$

où m sont des diviseurs du nombre d. On peut ne pas prendre en considération les polynômes à coefficients fractionnaires. Les polynômes « analogues aux polynômes récurrents » peuvent constituer une exception (problèmes n^{os} 614-615).

675. Démontrer que le polynôme du cinquième degré $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ à coefficients entiers est irréductible s'il n'a pas de zéros entiers et n'est divisible par aucun des polynômes à coefficients entiers de la forme

$$x^2 + \frac{am^3 - cm^2 - dn + be}{m^3 - n^2 + ae - dm} x + m,$$

où m est un diviseur de e, $n = \frac{e}{m}$.

676. Décomposer en facteurs les polynômes ou démontrer leur irréductibilité en utilisant les problèmes n^{os} 674, 675:

a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$; b) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$;

c) $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 23x - 12$;

d) $x^5 + x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6x + 6$.

677. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes de réductibilité du polynôme $x^4 + px^2 + q$ à coefficients rationnels (peut-être fractionnaires).

678. Démontrer que pour qu'un polynôme du quatrième degré ne possédant pas de zéros rationnels soit réductible, il faut (mais il ne suffit pas) que l'équation du troisième degré obtenue lors de la résolution par la méthode de Ferrari possède une racine rationnelle.

***679.** Démontrer que le polynôme $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - 1$ est irréductible; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres entiers tous différents les uns des autres.

***680.** Démontrer que le polynôme $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + 1$ est irréductible pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entiers et différents à l'exception de

$$(x - a)(x - a - 1)(x - a - 2)(x - a - 3) + 1 = [(x - a - 1)(x - a - 2) - 1]^2$$

et

$$(x - a)(x - a - 2) + 1 = (x - a - 1)^2.$$

***681.** Démontrer que si un polynôme du $n^{\text{ème}}$ degré à coefficients entiers admet les valeurs ± 1 pour plus de $2m$ valeurs entières de la variable ($n = 2m$ ou $2m + 1$), il est irréductible.

***682.** Démontrer que le polynôme

$$f(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$$

est irréductible si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres entiers différents.

***683.** Démontrer que le polynôme $f(x)$ à coefficients entiers, qui prend la valeur $+1$ pour plus de trois valeurs entières de la variable indépendante, ne peut admettre la valeur -1 pour des valeurs entières de la variable indépendante.

***684.** Démontrer qu'un polynôme du $n^{\text{ème}}$ degré à coefficients entiers, admettant les valeurs ± 1 pour plus de $\frac{n}{2}$ valeurs entières de la variable indépendante, est irréductible lorsque $n \geqslant 12$.

***685.** Démontrer que si le polynôme à coefficients entiers $ax^2 + bx + 1$ est irréductible, le polynôme $a[\varphi(x)]^2 + b\varphi(x) + 1$, où $\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$, est également irréductible pour $n \geqslant 7$. Ici $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres entiers différents.

§ 7. Limites des zéros d'un polynôme

686. Démontrer que les zéros du polynôme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ à coefficients réels ou complexes ne sont pas supérieurs en module à:

a) $1 + \max \left| \frac{a_k}{a_0} \right|, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$

b) $\rho + \max \left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{k-1}} \right|,$

$k = 1, 2, \ldots, n$, ρ est un nombre positif quelconque;

c) $2 \max \sqrt[k]{\left| \frac{a_k}{a_0} \right|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$

d) $\left| \frac{a_1}{a_0} \right| + \max \sqrt[k-1]{\left| \frac{a_k}{a_1} \right|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

687. Démontrer que les modules des zéros du polynôme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ne sont pas supérieurs à l'unique racine positive de l'équation $b_0x^n - b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - \ldots - b_n$, où

$$0 < b_0 \leqslant |a_0|, \; b_1 \geqslant |a_1|, \; b_2 \geqslant |a_2|, \; \ldots, b_n \geqslant |a_n|.$$

688. Démontrer que les modules des zéros du polynôme $f(x)=$ $=a_0x^n+a_rx^{n-r}+\ldots+a_n$, $a_r\neq 0$, ne sont pas supérieurs à :

a) $1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $k=r, \ldots, n$;

b) $\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$,

$k=r, \ldots, n$, ρ est un nombre positif quelconque;

c) $\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$, $k=r, \ldots, n$.

689. Démontrer que les zéros réels d'un polynôme à coefficients réels ne sont pas supérieurs à l'unique zéro non négatif du polynôme qui s'obtient du polynôme donné en rejetant tous ses termes (à l'exception du terme principal) dont les coefficients ont le même signe que celui du coefficient du terme principal.

Démontrer les théorèmes:

690. Les zéros réels du polynôme $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ à coefficients réels (pour $a_0>0$) ne sont pas supérieurs à:

a) $1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, où r est l'indice du premier coefficient négatif et a_k les coefficients négatifs du polynôme;

b) $\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$, où r est l'indice du premier coefficient négatif, a_k les coefficients négatifs et ρ un nombre positif quelconque;

c) $2\max\sqrt[k]{\frac{|a_k|}{a_0}}$, où a_k sont les coefficients négatifs du polynôme;

d) $\sqrt[r]{\frac{|a_r|}{a_0}}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$, où r est l'indice du premier coefficient négatif et a_k les coefficients négatifs.

691. Si tous les coefficients du polynôme $f(x)$ sont non négatifs, le polynôme n'a pas de zéros positifs.

692. Si $f(a)>0$, $f'(a)\geqslant 0, \ldots, f^{(n)}(a)\geqslant 0$, tous les zéros réels du polynôme ne sont pas supérieurs à a.

693. Trouver les bornes supérieure et inférieure pour les zéros réels des polynômes:

a) $x^4-4x^3+7x^2-8x+3$;

b) x^5+7x^3-3;

c) $x^7-108x^5-445x^3+900x^2+801$;

d) $x^4+4x^3-8x^2-10x+14$.

§ 8. Théorème de Sturm

694. Former les polynômes de Sturm et séparer les zéros des polynômes:

a) $x^3 - 3x - 1$; b) $x^3 + x^2 - 2x - 1$;
c) $x^3 - 7x + 7$; d) $x^3 - x + 5$; e) $x^3 + 3x - 5$.

695. Former les polynômes de Sturm et séparer les zéros des polynômes:

a) $x^4 - 12x^2 - 16x - 4$; b) $x^4 - x - 1$;
c) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$; d) $x^4 + x^2 - 1$;
e) $x^4 + 4x^3 - 12x + 9$.

696. Former les polynômes de Sturm et séparer les zéros des polynômes:

a) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$; b) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$;
c) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$; d) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$;
e) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1$.

697. Former la suite de Sturm et séparer les zéros des polynômes:

a) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$; b) $x^4 - 4x^2 + x + 1$;
c) $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$; d) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 8$;
e) $x^4 - x^3 - 2x + 1$.

698. Former la suite de Sturm et séparer les zéros des polynômes:

a) $x^4 - 6x^2 - 4x + 2$; b) $4x^4 - 12x^2 + 8x - 1$;
c) $3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 1$; d) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$;
e) $9x^4 - 126x^2 - 252x - 140$.

699. Former la suite de Sturm et séparer les zéros des polynômes:

a) $2x^5 - 10x^3 + 10x - 3$;
b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x + 1$;
c) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$;
d) $x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2$.

700. Former la suite de Sturm en utilisant la règle permettant de diviser les fonctions de Sturm par des quantités positives, et séparer les zéros des polynômes:

a) $x^4 + 4x^2 - 1$; b) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;
c) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 1$;
d) $x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$.

701. Utilisant le théorème de Sturm, déterminer le nombre de racines réelles de l'équation $x^3 + px + q = 0$ pour p et q réels.

***702.** Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation

$$x^n + px + q = 0.$$

703. Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation

$$x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b = 0.$$

704. Démontrer que si la suite de Sturm contient des polynômes de tous les degrés de 0 à n, le nombre des changements de signe dans la suite des coefficients des termes principaux des polynômes de Sturm est égal au nombre de couples de zéros complexes conjugués du polynôme initial.

705. Démontrer que si les polynômes $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ ont les propriétés suivantes:

1) $f(x) f_1(x)$ change son signe de plus en moins en passant par le zéro de $f(x)$;

2) deux polynômes voisins ne s'annulent pas simultanément;

3) si $f_\lambda(x_0) = 0$, alors $f_{\lambda-1}(x_0)$ et $f_{\lambda+1}(x_0)$ sont de signes contraires;

4) le dernier polynôme $f_k(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle (a, b),

le nombre des zéros du polynôme $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) est égal à l'accroissement du nombre de changements de signe dans la suite des valeurs des polynômes f, f_1, . . ., f_k, lors du passage de a à b.

706. Soit x_0 un zéro réel de $f'(x)$:

$$f_1(x) = \frac{1}{x - x_0} f'(x);$$

$f_2(x)$ est le reste de la division de $f(x)$ par $f_1(x)$, pris avec le signe contraire; $f_3(x)$ est le reste de la division de $f_1(x)$ par $f_2(x)$ pris avec le signe contraire, et ainsi de suite. On suppose que $f(x)$ n'a pas de zéros multiples. Trouver la relation existant entre le nombre de zéros réels de $f(x)$ et le nombre de changements de signe dans la suite des valeurs des polynômes construits pour $x = -\infty$, $x = x_0$ et $x = +\infty$.

***707.** Construire la suite de Sturm pour les polynômes d'Hermite

$$P_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

et déterminer le nombre de zéros réels.

***708.** Déterminer le nombre de zéros réels des polynômes de Laguerre

$$P_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n (e^{-x} x^n)}{dx^n}.$$

Déterminer le nombre de zéros réels des polynômes:

***709.** $E_n(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$

*710. $P_n(x)=(-1)^{n+1}x^{2n+2}e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{d^{n+1}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}$.

*711. $P_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^{n+1}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

*712. $P_n(x)=(-1)^n(x^2+1)^{n+\frac{1}{2}}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

*713. Soit $f(x)$ un polynôme du troisième degré ne possédant pas de zéros multiples. Montrer que le polynôme $F(x)=2f(x)f''(x)-[f'(x)]^2$ possède deux et seulement deux zéros réels. Examiner les cas pour lesquels $f(x)$ possède un zéro double ou triple.

714. Démontrer que si tous les zéros du polynôme $f(x)$ sont réels et distincts, tous les zéros de chacun des polynômes de la suite de Sturm, formée à l'aide de l'algorithme d'Euclide, sont réels et distincts.

§ 9. Théorèmes sur la distribution des zéros d'un polynôme

Démontrer les théorèmes suivants:

715. Tous les zéros du polynôme de Legendre $P_n(x)=\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ sont réels, distincts et compris dans l'intervalle $(-1, +1)$.

716. Si tous les zéros du polynôme $f(x)$ sont réels, tous les zéros du polynôme $\lambda f(x)+f'(x)$ le sont aussi pour n'importe quel λ réel.

*717. Si tous les zéros du polynôme $f(x)$ et tous les zéros du polynôme

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

sont réels, tous les zéros du polynôme

$$F(x)=a_0f(x)+a_1f'(x)+\ldots+a_nf^{(n)}(x)$$

le sont aussi.

*718. Si tous les zéros du polynôme $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sont réels, tous les zéros du polynôme

$$a_0x^n+a_1mx^{n-1}+a_2m(m-1)x^{n-2}+\ldots+a_nm(m-1)\ldots(m-n+1)$$

le sont aussi pour n'importe quel m entier positif.

*719. Si tous les zéros du polynôme $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sont réels, tous les zéros du polynôme

$$G(x)=a_0x^n+C_n^1a_1x^{n-1}+C_n^2a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

le sont aussi.

720. Démontrer que tous les zéros du polynôme

$$x^n + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)^2 x^{n-2} + \ldots + 1$$

sont réels.

***721.** Déterminer le nombre de zéros réels du polynôme

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1.$$

722. Déterminer le nombre de zéros réels du polynôme

$$x^{2n_1+1} + x^{2n_2+1} + \ldots + x^{2n_k+1} + a.$$

723. Déterminer le nombre de zéros réels du polynôme

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - A^2(x-a) - B^2(x-b) - C^2(x-c)$$

pour a, b, c, A, B, C réels.

724. Démontrer que

$$\varphi(x) = \frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{x-a_n} + B$$

n'a pas de zéros complexes quand $a_1, a_2, \ldots, a_n, A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ sont réels.

Démontrer les théorèmes suivants:

725. Si le polynôme $f(x)$ possède des zéros réels distincts, $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ n'a pas de zéros réels.

726. Toutes les racines de l'équation $\lambda f(x) + \mu\varphi(x) = 0$ sont réelles pour n'importe quels λ et μ réels si les zéros des polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont tous réels, simples et peuvent être séparés, c'est-à-dire qu'entre deux zéros quelconques de $f(x)$ il existe un zéro de $\varphi(x)$ et entre deux zéros quelconques de $\varphi(x)$ il existe un zéro de $f(x)$.

***727.** Les zéros des polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ peuvent être séparés si tous les zéros des polynômes $F(x) = \lambda f(x) + \mu\varphi(x)$ sont réels pour n'importe quels λ et μ réels.

***728.** Le nombre de zéros réels du polynôme $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ est égal au nombre de zéros complexes du polynôme $f(x)$ si tous les zéros de $f'(x)$ sont réels et distincts et $f(x)$ n'a pas de zéros multiples.

***729.** Si tous les zéros des polynômes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont réels et peuvent être séparés, les zéros de leurs dérivées le peuvent aussi.

***730.** Tous les zéros du polynôme $F(x) = \gamma f(x) + (\lambda + x)f'(x)$ sont réels pour $\gamma > 0$ ou $\gamma < -n$ et pour tout λ réel si tous les zéros du polynôme $f(x)$ sont réels.

***731.** Tous les zéros du polynôme

$$a_0\varphi(0) + a_1\varphi(1)x + a_2\varphi(2)x^2 + \ldots + a_n\varphi(n)x^n$$

sont réels si le polynôme

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

ne possède que des zéros réels et le polynôme

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k$$

a des zéros réels non compris dans l'intervalle $(0, n)$.

***732.** Tous les zéros du polynôme $a_0 + a_1 \gamma x + a_2 \gamma(\gamma-1)x^2 + \ldots + a_n \gamma(\gamma-1) \ldots (\gamma-n+1) x^n$ sont réels pour $\gamma > n-1$ si tous les zéros du polynôme $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ sont réels.

***733.** Si tous les zéros du polynôme $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ sont réels, alors pour $\gamma > n-1$, $\alpha > 0$ tous les zéros du polynôme

$$a_0 + \frac{\gamma}{\alpha} a_1 x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\alpha(\alpha+1)} a_2 x^2 + \ldots + \frac{\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} a_n x^n$$

le sont aussi.

***734.** Si tous les zéros du polynôme $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ sont réels, alors pour $0 < w \leqslant 1$ tous les zéros du polynôme $a_0 + a_1 w x + a_2 w^4 x^2 + \ldots + a_n w^{n^2} x^n$ le sont aussi.

***735.** Si tous les zéros du polynôme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ sont réels et de même signe, alors tous les zéros du polynôme

$$a_0 \cos\varphi + a_1 \cos(\varphi+\theta) x + a_2 \cos(\varphi + 2\theta) x^2 + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta) x^n$$

sont réels.

***736.** Tous les zéros des polynômes

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \text{et} \quad b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

sont réels et peuvent être séparés (les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont réels) si tous les zéros du polynôme

$$(a_0 + ib_0) + (a_1 + ib_1) x + \ldots + (a_n + ib_n) x^n$$

se trouvent dans le demi-plan supérieur.

***737.** Les parties imaginaires des zéros de $\varphi(x) + i\psi(x)$ sont de même signe si tous les zéros des polynômes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont réels et peuvent être séparés.

***738.** Si tous les zéros du polynôme $f(x)$ se trouvent dans le demi-plan supérieur, tous les zéros de sa dérivée s'y trouvent aussi.

***739.** Si tous les zéros du polynôme $f(x)$ sont situés dans un certain demi-plan, tous les zéros de sa dérivée sont situés dans le même demi-plan.

***740.** Les zéros de la dérivée du polynôme $f(x)$ sont compris à l'intérieur d'un contour convexe quelconque qui englobe tous les zéros du polynôme $f(x)$.

***741.** Toutes les racines de l'équation $[f(x)]^2 + k^2 [f'(x)]^2 = 0$ ont une partie imaginaire inférieure à kn en valeur absolue si $f(x)$ est un polynôme de degré n à zéros réels.

742. Si tous les zéros des polynômes $f(x) - a$ et $f(x) - b$ sont réels, tous les zéros du polynôme $f(x) - \lambda$ le sont aussi à condition que λ soit compris entre a et b.

***743.** Pour que les parties réelles de tous les zéros du polynôme $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ à coefficients réels soient de même signe, il faut et il suffit que les zéros des polynômes

$$x^n - a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} - \ldots$$

et

$$a_1x^{n-1} - a_3x^{n-3} + \ldots$$

soient tous réels et puissent être séparés.

***744.** Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les parties réelles de toutes les racines de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients réels soient négatives.

***745.** Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les parties réelles de toutes les racines de l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ à coefficients réels soient négatives.

***746.** Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients réels ne soient pas supérieures en module à l'unité.

***747.** Démontrer que tous les zéros du polynôme $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ne sont pas supérieurs en module à l'unité si $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$.

§ 10. Calcul approché des zéros d'un polynôme

748. Calculer avec une précision de 0,0001 la racine de l'équation $x^3 - 3x^2 - 13x - 7 = 0$, comprise dans l'intervalle $(-1, 0)$.

749. Calculer avec une précision de 0,000001 la racine réelle de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

750. Calculer avec une précision de 0,0001 les racines réelles des équations:

a) $x^3 - 10x - 5 = 0$; b) $x^3 + 2x - 30 = 0$;

c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$; d) $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$.

751. Diviser la demi-sphère de rayon unité en deux parties égales par un plan parallèle à la base.

752. Calculer avec une précision de 0,0001 la racine positive de l'équation $x^3 - 5x - 3 = 0$.

753. Calculer avec une précision de 0,0001 la racine de l'équation:

a) $x^4 + 3x^3 - 9x - 9 = 0$, comprise dans l'intervalle $(1, 2)$;

b) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$, comprise dans l'intervalle $(-1, 0)$;

c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 3 = 0$, comprise dans l'intervalle $(0, 1)$;

d) $x^4 - 10x^2 - 16x + 5 = 0$, comprise dans l'intervalle $(0, 1)$;

e) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 10x - 10 = 0$, comprise dans l'intervalle $(-4, -3)$;

f) $x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, comprise dans l'intervalle $(1, 2)$;

g) $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$, comprise dans l'intervalle $(-3, -2)$;

h) $x^4 - x^3 - 7x^2 - 8x - 6 = 0$, comprise dans l'intervalle $(3, 4)$;

i) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$, comprise dans l'intervalle $(1, 2)$.

754. Calculer avec une précision de 0,0001 les racines réelles des équations:

a) $x^4 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$;

b) $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$;

c) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 1 = 0$;

d) $x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3 = 0$;

e) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x - 1 = 0$;

f) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4 = 0$;

g) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$;

h) $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8 = 0$.

Chapitre 6

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

§ 1. Expression des fonctions symétriques à l'aide des fonctions fondamentales. Calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique

755. Exprimer

a) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

b) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

c) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$;

d) $x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^2x_3^5$;

e) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

f) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;

g) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

h) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

756. Exprimer

a) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;

b) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$;

c) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+$ $+x_4)$

à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

757. Exprimer les polynômes monogènes

a) $x_1^2+\ldots$;
b) $x_1^3+\ldots$;
c) $x_1^2x_2x_3+\ldots$;
d) $x_1^2x_2^2+\ldots$;
e) $x_1^3x_2+\ldots$;
f) $x_1^4+\ldots$;
g) $x_1^2x_2^2x_3+\ldots$;
h) $x_1^3x_2x_3+\ldots$;
i) $x_1^3x_2^2+\ldots$;
j) $x_1^4x_2+\ldots$;
k) $x_1^5+\ldots$;
l) $x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots$;
m) $x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots$;
n) $x_1^3x_2x_3x_4+\ldots$;
o) $x_1^3x_2^2x_3+\ldots$;
p) $x_1^3x_2^3+\ldots$;
q) $x_1^4x_2x_3+\ldots$;
r) $x_1^4x_2^2+\ldots$;
s) $x_1^5x_2+\ldots$;
t) $x_1^6+\ldots$

à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

758. Exprimer

a) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2+(x_1-x_2+x_3+\ldots$
$\ldots+x_n)^2+(x_1+x_2-x_3+\ldots+x_n)^2+\ldots$
$\ldots+(x_1+x_2+x_2+\ldots-x_n)^2$;

b) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)(x_1-x_2+x_3+\ldots+x_n)\ldots$
$$\ldots(x_1+x_2+\ldots-x_n)$$
à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

759. Exprimer

a) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^2$; b) $\sum\limits_{i>k}(x_i+x_k)^3$;

c) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^4$; d) $\sum\limits_{\substack{i>k\\ j\neq i;\ j\neq k}}(x_i+x_k-x_j)^2$

à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

760. Expimer le polynôme monogène
$$x_1^2x_2^2\ldots x_k^2+\ldots$$
à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

761. Exprimer
$$\sum(a_1x_{i_1}+a_2x_{i_2}+\ldots+a_nx_{i_n})^2$$
à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

La sommation est étendue à toutes les permutations possibles
$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n \quad \text{des numéros} \quad 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

762. Exprimer

a) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}$;

b) $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}+\dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_2+x_3}+\dfrac{(x_3-x_1)^2}{x_3+x_1}$;

c) $\left(\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}\right)\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}\right)$

à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

763. Exprimer

a) $\dfrac{x_1x_2}{x_3x_4}+\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}+\dfrac{x_1x_4}{x_2x_3}+\dfrac{x_2x_3}{x_1x_4}+\dfrac{x_2x_4}{x_1x_3}+\dfrac{x_3x_4}{x_1x_2}$;

b) $\dfrac{x_1+x_2}{x_3+x_4}+\dfrac{x_1+x_3}{x_2+x_4}+\dfrac{x_1+x_4}{x_2+x_3}+\dfrac{x_2+x_3}{x_1+x_4}+\dfrac{x_2+x_4}{x_1+x_3}+\dfrac{x_3+x_4}{x_1+x_2}$

à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

764. Exprimer

a) $\sum\dfrac{1}{x_i}$; b) $\sum\dfrac{1}{x_i^2}$; c) $\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{x_i}{x_j}$;

d) $\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{x_i^2}{x_j^2}$; e) $\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{x_i^2}{x_j}$; f) $\sum\limits_{\substack{i\neq j\\ i\neq k\\ j>k}}\dfrac{x_jx_k}{x_i}$

à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux.

765. Calculer la somme des carrés des racines de l'équation
$$x^3 + 2x - 3 = 0.$$

766. Calculer
$$x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3$$
à partir des racines x_1, x_2, x_3 de l'équation
$$x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0.$$

767. Déterminer la valeur de la fonction symétrique monogène
$$x_1^5x_2x_3 + \ldots$$
des racines x_1, x_2, x_3, x_4 de l'équation
$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

768. Soient x_1, x_2, x_3 les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Calculer:

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}$;

b) $x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^4x_3^2 + x_2^2x_3^4 + x_3^4x_1^2 + x_3^2x_1^4$;

c) $(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_2x_1)$;

d) $(x_1 + x_2)^4 (x_1 + x_3)^4 (x_2 + x_3)^4$;

e) $\frac{x_1^2}{(x_2+1)(x_3+1)} + \frac{x_2^2}{(x_1+1)(x_3+1)} + \frac{x_3^2}{(x_1+1)(x_2+1)}$;

f) $\frac{x_1^2}{(x_1+1)^2} + \frac{x_2^2}{(x_2+1)^2} + \frac{x_3^2}{(x_3+1)^2}$.

769. Quelle relation existe entre les coefficients de l'équation du troisième degré
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
si le carré d'une des racines est égal à la somme des carrés des deux autres ?

770. Démontrer le théorème suivant: les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines de l'équation du troisième degré $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ aient des parties réelles négatives, sont:
$$a > 0; \qquad ab - c > 0; \qquad c > 0.$$

771. Trouver l'aire et le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés sont égaux aux racines de l'équation du troisième degré:
$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

***772.** Trouver la relation entre les coefficients d'une équation dont les racines sont égales aux sinus des angles d'un triangle.

773. Calculer, à partir des racines de l'équation $f(x) = 0$, la valeur de la fonction symétrique:

a) $x_1^4 x_2 + \ldots,$ $\qquad f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$;

b) $x_1^3 x_2^3 + \ldots,$ $\qquad f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$;

c) $(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2),$

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8.$$

774. Exprimer, en fonction des coefficients de l'équation

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

les fonctions symétriques suivantes:

a) $a_0^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$;

b) $a_0^4(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2)$;

c) $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2} + \dfrac{(x_1-x_3)^2}{x_1x_3} + \dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3}$;

d) $a_0^4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2)$.

775. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros du polynôme

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Démontrer que le polynôme symétrique en $x_2, x_3, \ldots, x_n$ peut être représenté sous forme de polynôme en x_1.

776. En utilisant le résultat du problème nº 775, résoudre les problèmes nºs 755 e), 755 g), 774 b), 774 d).

777. Trouver $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$, où f_k est la $k^{\text{ème}}$ fonction symétrique fondamentale en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

778. Supposons que l'on connaisse l'expression de la fonction symétrique $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au moyen des fonctions fondamentales. Exprimer $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ à l'aide de fonctions symétriques fondamentales.

Démontrer les théorèmes:

779. Si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction symétrique possédant la propriété

$$F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

et si $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est l'expression de cette fonction au moyen des fonctions fondamentales, on a:

$$n\frac{\partial \Phi}{\partial f_1} + (n-1) f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} + \ldots + f_{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial f_n} = 0,$$

et inversement.

780. Chaque polynôme symétrique homogène du deuxième degré, possédant la propriété énoncée dans le problème n° 779, est égal à $\alpha \sum_{i<k} (x_i - x_k)^2$, où α est une constante.

781. Trouver la forme générale des polynômes symétriques homogènes du troisième degré qui possèdent la propriété énoncée dans le problème n° 779.

782. Exprimer

$$\sum_{i<j<k} (x_i - x_j)^2 (x_i - x_k)^2 (x_j - x_k)^2,$$

au moyen des polynômes symétriques fondamentaux, en utilisant le résultat du problème n° 779.

783. Démontrer que parmi les polynômes symétriques $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ayant la propriété

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a),$$

il existe $n - 1$ « polynômes fondamentaux » $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ tels que chaque polynôme de la classe considérée peut être exprimé sous forme de polynôme en $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$.

784. Exprimer au moyen des polynômes φ_2, φ_3 du problème n° 783 les fonctions symétriques suivantes:

a) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$;

b) $(x_1 - x_2)^4 + (x_1 - x_3)^4 + (x_2 - x_3)^4$.

785. Exprimer au moyen des polynômes $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ du problème n° 783 les fonctions symétriques suivantes:

a) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$;

b) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2$.

§ 2. Sommes des puissances

786. Exprimer s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 au moyen des polynômes symétriques fondamentaux en utilisant les formules de Newton.

787. Exprimer f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 par des sommes des puissances $s_1, s_2, \ldots$, en utilisant les formules de Newton.

788. Trouver la somme des puissances cinquièmes des racines de l'équation:

$$x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

789. Trouver la somme des puissances huitièmes des racines de l'équation

$$x^4 - x^3 - 1 = 0.$$

790. Trouver la somme des puissances dixièmes des racines de l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

791. Trouver $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des racines de l'équation

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \frac{x^{n-2}}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n!} = 0.$$

792. Démontrer que

$$a^k(x_1^k + x_2^k) \quad (-1)^k\left[b^k - \frac{k}{1}b^{k-2}ac + \frac{k(k-3)}{1\cdot 2}b^{k-4}a^2c^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{k(k-4)(k-5)}{1\cdot 2\cdot 3}b^{k-6}a^3c^3 + \ldots\right]$$

si x_1, x_2 sont les racines de l'équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$.

793. Démontrer que pour chaque équation du troisième degré

$$\frac{s_1^5 - s_5}{s_1^3 - s_3} = \frac{5}{3}(f_1^2 - f_2).$$

794. Démontrer que si la somme des racines de l'équation du quatrième degré est nulle, on a

$$\frac{s_5}{5} = \frac{s_3}{3}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

795. Démontrer que si pour une équation du sixième degré $s_1 = s_3 = 0$, on a

$$\frac{s_7}{7} = \frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

796. Trouver les équations du $n^{\text{ème}}$ degré, pour lesquelles

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-1} = 0.$$

797. Trouver les équations du $n^{\text{ème}}$ degré, pour lesquelles

$$s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 0.$$

798. Trouver l'équation du $n^{\text{ème}}$ degré pour laquelle

$$s_2 = 1,\ s_3 = s_4 = \ldots = s_n = s_{n+1} = 0.$$

799. Exprimer $\sum\limits_{i<j} x_i^k x_j^k$ par des sommes des puissances.

***800.** Exprimer $\sum\limits_{i<j}(x_i + x_j)^k$ par des sommes des puissances.

***801.** Exprimer $\sum\limits_{i<j}(x_i - x_j)^{2k}$ par des sommes des puissances.

802. Démontrer que $s_k = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2f_2 & f_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3f_3 & f_2 & f_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kf_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \ldots & f_1 \end{vmatrix}.$

803. Démontrer que $f_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}$.

804. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \\ s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & n \end{vmatrix}$.

*805. Trouver s_m à partir des racines de l'équation

$$X_n(x) = 0.$$

*806. Démontrer que les expressions de f_2, f_3 et f_4 en fonction des racines de l'équation $X_n(x) = 0$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 et ± 1.

*807. Résoudre le système d'équations:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = a \end{gathered}$$

et trouver $x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1}$.

*808. Calculer les sommes des puissances $s_1, s_2, \dots, s_n$ des racines de l'équation

$$x^n + (a+b)x^{n-1} + (a^2+ab+b^2)x^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n) = 0.$$

*809. Calculer les sommes des puissances $s_1, s_2, \dots, s_n$ des racines de l'équation

$$x^n + (a+b)x^{n-1} + (a^2+b^2)x^{n-2} + \dots + (a^n+b^n) = 0.$$

§ 3. Transformation des équations

810. Trouver les équations dont les racines sont:

a) $x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_3 + x_1$;
b) $(x_1 - x_2)^2,\ (x_2 - x_3)^2,\ (x_3 - x_1)^2$;
c) $x_1^2 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_3x_1,\ x_3^2 - x_1x_2$;
d) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3),\ (x_2 - x_1)(x_2 - x_3),\ (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$;
e) $x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2$; f) $x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3$,

où x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

811. Trouver l'équation dont les racines sont:

$$(x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2)^3 \quad \text{et} \quad (x_1 + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon)^3,$$

où $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

812. Trouver l'équation de degré le plus petit dont l'une des racines est $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}$, où x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation du troisième degré $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, et dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de l'équation donnée.

813. Trouver l'équation de degré le plus petit dont l'une des racines est $\frac{x_1}{x_2}$, où x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, et dont les coefficients s'expriment en fonction des coefficients de l'équation donnée.

814. Trouver l'équation de degré le plus petit dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de l'équation donnée $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, admettant en qualité de l'une des racines de l'équation cherchée:

a) $x_1x_2 + x_3x_4$; b) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$; c) x_1x_2;
d) $x_1 + x_2$; e) $(x_1 - x_2)^2$.

815. Utilisant les résultats des problèmes n^{os} 814 a) et 814 b) exprimer les racines de l'équation du quatrième degré en fonction des racines de l'équation auxiliaire du troisième degré du problème n° 814 a).

816. Ecrire la formule de la résolution de l'équation

$$x^4 - 6ax^2 + bx - 3a^2 = 0.$$

817. Construire l'équation dont l'une des racines est:

$$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) \times$$
$$\times (x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1),$$

où x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont les racines de l'équation

$$x^5 + ax + b = 0.$$

§ 4. Résultant et discriminant

***818.** Démontrer que le résultant des polynômes

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \quad \text{et} \quad \varphi(x)=b_0x^m+\ldots+b_m$$

est égal au déterminant formé par les coefficients des restes de la division de $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, ..., $x^{n-1}\varphi(x)$ par $f(x)$. On suppose que les restes sont disposés dans l'ordre de croissance des puissances de x (procédé d'Hermite).

Remarque: Le reste $r_k(x)$ de la division de $x^{k-1}\varphi(x)$ par $f(x)$ est égal au reste de la division de $xr_{k-1}(x)$ par $f(x)$.

***819.** Démontrer que le résultant des polynômes

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

et

$$\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

est égal au déterminant formé par les coefficients des polynômes du $(n-1)^{\text{ème}}$ degré (ou d'un degré inférieur)

$$\psi_k(x)=(a_0x^{k-1}+a_1^{k-2}+\ldots+a_{k-1})\,\varphi(x)-$$
$$-(b_0x^{k-1}+b_1x^{k-2}+\ldots+b_{k-1})\,f(x),$$

$k=1, \ldots, n$ (procédé de Bezout).

Remarque:

$$\psi_1=a_0\varphi-b_0f,$$
$$\psi_k=x\psi_{k-1}+a_{k-1}\varphi-b_{k-1}f.$$

***820.** Démontrer que le résultant des polynômes

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \quad \text{et} \quad \varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$$

pour $n>m$ est égal au déterminant formé par les coefficients des polynômes $\chi_k(x)$ de degré non supérieur à $(n-1)$, déterminés par les formules:

$$\chi_k(x)=x^{k-1}\varphi(x) \quad \text{si} \quad 1\leqslant k\leqslant n-m;$$
$$\chi_k(x)=(a_0x^{k-n+m-1}+a_1x^{k-n+m-2}+\ldots+a_{k-n+m-1})\,x^{n-m}\varphi(x)-$$
$$-(b_0x^{k-n+m-1}+b_1x^{k-n+m-2}+\ldots+b_{k-n+m-1})\,f(x)$$

(les polynômes χ_k sont disposés dans l'ordre de croissance des puissances de x).

Remarque:

$$\chi_{n-m+1}=a_0x^{n-m}\varphi(x)-b_0f(x),$$
$$\chi_k=x\chi_{k-1}+a_{k-n+m-1}x^{n-m}\varphi(x)-b_{k-n+m-1}f(x)$$

quand $k>n-m+1$.

821. Calculer le résultant des polynômes:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ et $2x^2 - x - 1$;
b) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ et $x^2 + x + 3$;
c) $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ et $x^4 - 2x^2 - 3x + 4$;
d) $3x^3 + 2x^2 + x + 1$ et $2x^3 + x^2 - x - 1$;
e) $2x^4 - x^3 + 3$ et $3x^3 - x^2 + 4$;
f) $a_0x^2 + a_1x + a_2$ et $b_0x^2 + b_1x + b_2$.

822. Pour quelle valeur de λ les polynômes ont-ils un zéro commun:

a) $x^3 - \lambda x + 2$ et $x^2 + \lambda x + 2$;
b) $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3$ et $x^2 + \lambda^2 - 2$;
c) $x^3 + \lambda x^2 - 9$ et $x^3 + \lambda x - 3$?

823. Eliminer x des systèmes d'équations:

a) $x^2 - xy + y^2 = 3,\quad x^2y + xy^2 = 6$;
b) $x^3 - xy - y^3 + y = 0,\quad x^2 + x - y^2 - 1 = 0$;
c) $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 8,\quad y = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2$.

824. Résoudre les systèmes:

a) $y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0,$
$y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0$;
b) $y^2 + x^2 - y - 3x = 0,$
$y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0$;
c) $5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0,$
$y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0$;
d) $y^2 + (x - 4)\, y + x^2 - 2x + 3 = 0,$
$y^3 - 5y^2 + (x + 7)\, y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$;
e) $2y^3 - 4xy^2 - (2x^2 - 12x + 8)\, y + x^3 + 6x^2 - 16x = 0,$
$4y^3 - (3x + 10)\, y^2 - (4x^2 - 24x + 16)\, y - 3x^3 +$
$+ 2x^2 - 12x + 40 = 0.$

825. Déterminer le résultant des polynômes:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{et} \quad a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

826. Démontrer que

$$\Re\,(f,\ \varphi_1 \cdot \varphi_2) = \Re\,(f,\ \varphi_1) \cdot \Re\,(f,\ \varphi_2).$$

*827. Trouver le résultant des polynômes

$$X_n \quad \text{et} \quad x^m - 1.$$

*828. Trouver le résultant des polynômes

$$X_m \quad \text{et} \quad X_n.$$

829. Calculer le discriminant du polynôme:

a) $x^3 - x^2 - 2x + 1$; b) $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$;
c) $3x^3 + 3x^2 + 5x + 2$; d) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$;
e) $2x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 1$.

830. Calculer le discriminant du polynôme:

a) $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - b$;
b) $(x^2 - x + 1)^3 - \lambda (x^2 - x)^2$;
c) $ax^3 - bx^2 + (b - 3a) x + a$;
d) $x^4 - \lambda x^3 + 3 (\lambda - 4) x^2 - 2 (\lambda - 8) x - 4$.

831. Pour quelle valeur de λ le polynôme a-t-il des zéros multiples

a) $x^3 - 3x + \lambda$; b) $x^4 - 4x + \lambda$;
c) $x^3 - 8x^2 + (13 - \lambda) x - (6 + 2\lambda)$;
d) $x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda) x^2 + 2x - 2$?

832. Caractériser le nombre de zéros réels d'un polynôme à coefficients réels d'après le signe du discriminant:

a) pour un polynôme du troisième degré;
b) pour un polynôme du quatrième degré;
c) dans le cas général.

833. Calculer le discriminant du polynôme $x^n + a$.

*834. Calculer le discriminant du polynôme $x^n + px + q$.

*835. Calculer le discriminant du polynôme

$$a_0x^{m+n} + a_1x^m + a_2.$$

836. Connaissant le discriminant du polynôme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

trouver le discriminant du polynôme

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

837. Démontrer que le discriminant d'un polynôme du quatrième degré est égal au discriminant de sa résolvante de Ferrari [problème nº 814 a) et problème nº 80].

838. Démontrer que

$$D((x - a) f(x)) = D(f(x)) [f(a)]^2.$$

*839. Calculer le discriminant du polynôme

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1.$$

*840. Calculer le discriminant du polynôme

$$x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a.$$

841. Démontrer que le discriminant du produit de deux polynômes est égal au produit des discriminants, multiplié par le carré de leur résultant.

842. Trouver le discriminant du polynôme

$$X_{p^m} = \frac{x^{p^m}-1}{x^{p^{m-1}}-1}.$$

*843. Trouver le discriminant du polynôme circulaire X_n.

*844. Calculer le discriminant du polynôme

$$E_n = n!\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

*845. Calculer le discriminant du polynôme

$$F_n = x^n + \frac{a}{1}x^{n-1} + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{n-2} + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

*846. Calculer le discriminant du polynôme d'Hermite

$$P_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}.$$

*847. Calculer le discriminant du polynôme de Laguerre

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

*848. Calculer le discriminant du polynôme de Tchébicheff

$$2\cos\left(n \arccos\frac{x}{2}\right).$$

*849. Calculer le discriminant du polynôme

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(1+x^2)^{n+1}\frac{d^n\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{dx^n}.$$

*850. Calculer le discriminant du polynôme

$$P_n(x) = (-1)^n(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n}.$$

*851. Calculer le discriminant du polynôme

$$P_n(x) = (-1)^n x^{2n+2} e^{-\frac{1}{x}}\frac{d^n\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n}.$$

*852. Trouver le maximum du discriminant du polynôme

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

dont tous les zéros sont réels et liés par la relation

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n(n-1)R^2.$$

853. Le discriminant de $f(x)$ étant connu, trouver le discriminant de $f(x^2)$.

854. Le discriminant de $f(x)$ étant connu, trouver le discriminant de $f(x^m)$.

855. Démontrer que le discriminant de $F(x)=f(\varphi(x))$ est égal à

$$[D(f)]^m \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x)-x_i),$$

où m est le degré de $\varphi(x)$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros de $f(x)$. On admet que les coefficients des termes principaux de f et φ sont égaux à l'unité.

§ 5. Transformation de Tschirnhausen et élimination de l'irrationnalité du dénominateur

856. Transformer l'équation

$$(x-1)(x-3)(x+4)=0$$

par la substitution $y=x^2-x-1$.

857. Transformer les équations:

a) $x^3-3x-4=0$ par la substitution $y=x^2+x+1$;

b) $x^3+2x^2+2=0$ par la substitution $y=x^2+1$;

c) $x^4-x-2=0$ par la substitution $y=x^3-2$;

d) $x^4-x^3-x^2+1=0$ par la substitution $y=x^3+x^2+x+1$.

858. Transformer les équations par le procédé de Tschirnhausen et trouver les transformations inverses:

a) $x^3-x+2=0$, $\quad y=x^2+x$;

b) $x^4-3x+1=0$, $\quad y=x^3+x$;

c) $x^4+5x^3+6x^2-1=0$, $\quad y=x^3+4x^2+3x-1$.

859. Transformer l'équation $x^3-x^2-2x+1=0$ par la substitution $y=2-x^2$ et interpréter le résultat obtenu.

860. Pour que les racines d'une équation du troisième degré à coefficients rationnels s'expriment l'une par l'autre rationnellement avec des coefficients rationnels, il faut et il suffit que le discriminant soit le carré d'un nombre rationnel. Démontrer.

861. Eliminer l'irrationnalité du dénominateur des expressions:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; $\quad$ b) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$; $\quad$ c) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

862. Eliminer l'irrationnalité du dénominateur des expressions:

a) $\frac{\alpha}{\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3-3\alpha+1=0$;

b) $\frac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

c) $\frac{1}{3\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1}$, $\qquad \alpha^4-\alpha^3+2\alpha+1=0$;

d) $\frac{1}{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}$, $\qquad \alpha^4+\alpha^3-4\alpha^2-3\alpha+2=0$.

863. Démontrer que chaque fonction rationnelle de la racine x_1 de l'équation du troisième degré $x^3+ax^2+bx+c=0$ peut être représentée sous la forme $\frac{Ax_1+B}{Cx_1+D}$ avec les coefficients A, B, C, D, qui s'expriment rationnellement par les coefficients de l'expression initiale et par les coefficients a, b, c.

864. Supposons que le discriminant d'une équation du troisième degré à coefficients rationnels et irréductible dans le champ des nombres rationnels représente le carré d'un nombre rationnel. Dans ce cas, il est possible de lier les racines par la relation $x_2=\frac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta}$. A quelle condition doivent satisfaire les coefficients α, β, γ, δ ?

865. Effectuer la transformation $y=x^2$ dans l'équation

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

866. Effectuer la transformation $y=x^3$ dans l'équation

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

***867.** Démontrer que si tous les zéros x_i du polynôme

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \quad a_n\neq 0,$$

à coefficients entiers satisfont à la condition $|x_i|\leqslant 1$, ils sont tous des racines de l'unité.

§ 6. Polynômes invariants par rapport aux permutations paires des variables. Polynômes invariants par rapport aux permutations circulaires des variables

868. Démontrer que si le polynôme reste invariant par rapport aux permutations paires et change de signe lors des permutations impaires des variables, il est divisible par le déterminant de Vandermonde formé de ces variables et le quotient de la division est un polynôme symétrique.

869. Démontrer que chaque polynôme qui est invariant par rapport aux permutations paires des variables peut être représenté sous la forme

$$F_1 + F_2\Delta,$$

où F_1 et F_2 sont des polynômes symétriques et Δ le déterminant de Vandermonde formé de variables.

870. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n+1} \end{vmatrix}.$$

871. Construire l'équation dont les racines sont $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$, $\alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_1$, $\alpha x_3 + \beta x_1 + \gamma x_2$, où x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

872. Former l'équation dont les racines sont $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$, $x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2$, où x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ et y_1, y_2, y_3 les racines de l'équation $y^3 + p'y + q' = 0$.

873. Pour que les équations à coefficients rationnels

$$x^3 + px + q = 0,$$
$$y^3 + p'y + q' = 0$$

soient liées par la transformation rationnelle de Tschirnhausen il faut et il suffit que le rapport de leurs discriminants Δ et Δ' soit le carré d'un nombre rationnel et que l'une des équations

$$u^3 = 3pp'u + \frac{27qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2}$$

ait une racine rationnelle. Démontrer.

874. Démontrer que chaque polynôme de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, qui reste invariant par rapport aux permutations circulaires des variables, peut être représenté sous la forme

$$\sum A f_1^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2} \dots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

où $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ sont les formes linéaires:

$$\eta_1 = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots + x_n,$$
$$\eta_2 = x_1\varepsilon^2 + x_2\varepsilon^4 + \dots + x_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta_{n-1} = x_1\varepsilon^{n-1} + x_2\varepsilon^{2n-2} + \dots + x_n;$$
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

et les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ satisfont à la condition: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}$ est divisible par n.

875. Pour des fonctions rationnelles qui restent invariantes par rapport aux permutations circulaires des variables, indiquer n fonctions fondamentales (fractions et fonctions à coefficients non rationnels) à l'aide desquelles toutes ces fonctions s'expriment rationnellement.

876. Pour des fonctions rationnelles de trois variables, qui sont invariantes par rapport aux permutations circulaires, indiquer trois fonctions fondamentales à coefficients rationnels.

877. Pour des fonctions rationnelles de quatre variables, qui sont invariantes par rapport aux permutations circulaires, indiquer quatre fonctions fondamentales à coefficients rationnels.

878. Pour des fonctions rationnelles de cinq variables, qui restent invariantes par rapport aux permutations circulaires, indiquer cinq fonctions fondamentales à coefficients rationnels.

Chapitre 7

ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans cette partie on a adopté la terminologie et les notations suivantes. On entend par *espace* l'espace vectoriel sur le champ des nombres réels sauf mentions spéciales. Ce terme s'applique aussi bien à l'espace en tant que tel qu'à l'espace considéré comme une partie d'un autre espace plus large. Cependant dans le cas où il est nécessaire de souligner ce fait on emploie le terme *sous-espace*. On appelle *variété linéaire* l'ensemble de vecteurs de la forme $X_0 + X$, où X_0 est un certain vecteur fixé et X parcourt l'ensemble de tous les vecteurs d'un certain sous-espace.

L'égalité $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ signifie que X a comme coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans une certaine base fixée de l'espace; s'il est question de l'espace euclidien, on suppose cette base orthonormale.

On appelle parfois les vecteurs des points, les variétés unidimensionnelles des droites, les variétés bidimensionnelles des plans.

§ 1. Sous-espaces et variétés linéaires. Transformation des coordonnées

879. Soit donné l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Déterminer sa base et sa dimension:

a) $X_1 = (2, 1, 3, 1)$, $\quad X_2 = (1, 2, 0, 1)$,
$X_3 = (-1, 1, -3, 0)$;

b) $X_1 = (2, 0, 1, 3, -1)$, $\quad X_2 = (1, 1, 0, -1, 1)$,
$X_3 = (0, -2, 1, 5, -3)$, $\quad X_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$;

c) $X_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\quad X_2 = (-1, 1, -3, 1)$,
$X_3 = (4, 5, 3, -1)$, $\quad X_4 = (1, 5, -3, 1)$.

880. Déterminer la base et la dimension de la somme et de l'intersection des espaces engendrés par les vecteurs $X_1, \ldots, X_k$ et $Y_1, \ldots, Y_m$:

a) $X_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\quad Y_1 = (2, -1, 0, 1)$,
$X_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $\quad Y_2 = (1, -1, 3, 7)$;

b) $X_1 = (1, 2, -1, -2)$, $Y_1 = (2, 5, -6, -5)$,
$X_2 = (3, 1, 1, 1)$, $Y_2 = (-1, 2, -7, -3)$,
$X_3 = (-1, 0, 1, -1)$;

c) $X_1 = (1, 1, 0, 0)$, $Y_1 = (0, 0, 1, 1)$,
$X_2 = (1, 0, 1, 1)$, $Y_2 = (0, 1, 1, 0)$.

881. Trouver les coordonnées du vecteur X dans la base E_1, E_2, E_3, E_4:

a) $X = (1, 2, 1, 1)$, $E_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$E_2 = (1, 1, -1, -1)$,
$E_3 = (1, -1, 1, -1)$, $E_4 = (1, -1, -1, 1)$;

b) $X = (0, 0, 0, 1)$, $E_1 = (1, 1, 0, 1)$,
$E_2 = (2, 1, 3, 1)$,
$E_3 = (1, 1, 0, 0)$, $E_4 = (0, 1, -1, -1)$.

882. Etablir les formules de transformation des coordonnées lors du passage de la base E_1, E_2, E_3, E_4 à la base E'_1, E'_2, E'_3, E'_4:

a) $E_1 = (1, 0, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1, 0)$,
$E_4 = (0, 0, 0, 1)$, $E'_1 = (1, 1, 0, 0)$, $E'_2 = (1, 0, 1, 0)$,
$E'_3 = (1, 0, 0, 1)$, $E'_4 = (1, 1, 1, 1)$;

b) $E_1 = (1, 2, -1, 0)$, $E_2 = (1, -1, 1, 1)$,
$E_3 = (-1, 2, 1, 1)$, $E_4 = (-1, -1, 0, 1)$,
$E'_1 = (2, 1, 0, 1)$,
$E'_2 = (0, 1, 2, 2)$, $E'_3 = (-2, 1, 1, 2)$,
$E'_4 = (1, 3, 1, 2)$.

883. L'équation d'une « surface » par rapport à une certaine base $E_1, \ldots, E_4$ est de la forme $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$. Trouver l'équation de cette surface par rapport à la base

$$E'_1 = (1, 1, 1, 1); \qquad E'_3 = (1, -1, 1, -1);$$
$$E'_2 = (1, 1, -1, -1); \qquad E'_4 = (1, -1, -1, 1)$$

(les coordonnées sont données dans la même base $E_1, \ldots, E_4$).

***884.** Dans l'espace des polynômes en $\cos x$ de degré non supérieur à n écrire les formules de transformation des coordonnées permettant de passer de la base $1, \cos x, \ldots, \cos^n x$ à la base $1, \cos x, \ldots, \cos nx$ et inversement.

885. Dans l'espace à quatre dimensions trouver une droite passant par l'origine des coordonnées et coupant les droites:

$$x_1 = 2 + 3t, \quad x_2 = 1 - t, \quad x_3 = -1 + 2t, \quad x_4 = 3 - 2t$$

et

$$x_1 = 7t, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1 + t, \quad x_4 = -1 + 2t.$$

Trouver les points d'intersection de cette droite avec les droites données.

886. Démontrer que deux droites quelconques dans l'espace à n dimensions peuvent être immergées dans une variété linéaire à trois dimensions.

887. Etudier sous forme générale la condition de résolubilité du problème n° 885 pour deux droites dans l'espace à n dimensions.

888. Démontrer que deux plans quelconques dans l'espace à n dimensions peuvent être immergés dans une variété linéaire à cinq dimensions.

889. Donner la description de tous les cas possibles de positions relatives de deux plans dans l'espace à n dimensions.

890. Démontrer qu'une variété linéaire peut être caractérisée par un ensemble de vecteurs contenant avec deux vecteurs quelconques X_1, X_2 leurs combinaisons linéaires $\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$ pour n'importe quel α.

§ 2. Géométrie élémentaire de l'espace euclidien à n dimensions

891. Déterminer le produit scalaire des vecteurs X et Y:

a) $X = (2, 1, -1, 2)$, $\qquad Y = (3, -1, -2, 1)$;

b) $X = (1, 2, 1, -1)$, $\qquad Y = (-2, 3, -5, -1)$.

892. Déterminer l'angle compris entre les vecteurs X et Y:

a) $X = (2, 1, 3, 2)$, $\qquad Y = (1, 2, -2, 1)$;

b) $X = (1, 2, 2, 3)$, $\qquad Y = (3, 1, 5, 1)$;

c) $X = (1, 1, 1, 2)$, $\qquad Y = (3, 1, -1, 0)$.

893. Déterminer les cosinus des angles formés par la droite $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ et les axes de coordonnées.

894. Déterminer les cosinus des angles intérieurs du triangle ABC défini par les coordonnées de ses sommets

$$A = (1, 2, 1, 2), \qquad B = (3, 1, -1, 0), \qquad C = (1, 1, 0, 1).$$

895. Trouver la longueur des diagonales d'un cube à n dimensions de côté unité.

896. Trouver le nombre de diagonales d'un cube à n dimensions, perpendiculaires à une diagonale donnée.

897. Trouver dans l'espace à n dimensions n points de coordonnées non négatives tels que la distance les séparant les uns des autres et de l'origine des coordonnées soit égale à 1. Placer le premier de ces points sur le premier axe de coordonnées, le second dans le plan formé par les deux premiers axes et ainsi de suite. (Ces points constituent avec l'origine des coordonnées les sommets d'un simplexe régulier dont la longueur de l'arête est égale à 1.)

898. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon d'une sphère circonscrite au simplexe du problème n° 897.

899. Normer le vecteur $(3, 1, 2, 1)$.

900. Trouver le vecteur normé, orthogonal aux vecteurs $(1, 1, 1, 1)$; $(1, -1, -1, 1)$; $(2, 1, 1, 3)$.

901. Construire la base orthonormale de l'espace en admettant comme deux vecteurs de cette base les vecteurs

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right).$$

902. Par le procédé d'orthogonalisation trouver la base orthogonale de l'espace engendré par les vecteurs

$$(1, 2, 1, 3); \qquad (4, 1, 1, 1); \qquad (3, 1, 1, 0).$$

903. Adjoindre à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

deux autres lignes orthogonales entre elles et aux trois premières.

904. Interpréter le système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

et son système fondamental de solutions dans l'espace à n dimensions en estimant que les coefficients de chaque équation sont les coordonnées d'un vecteur.

905. Trouver le système fondamental orthonormal de solutions pour le système d'équations:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

906. Décomposer le vecteur X en une somme de deux vecteurs, dont l'un est situé dans l'espace engendré par les vecteurs $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et l'autre est orthogonal à cet espace (projection orthogonale et composante orthogonale du vecteur X):

a) $X = (5, 2, -2, 2)$, $\quad A_1 = (2, 1, 1, -1)$,
$A_2 = (1, 1, 3, 0)$;

b) $X = (-3, 5, 9, 3)$, $\quad A_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$A_2 = (2, -1, 1, 1)$, $\quad A_3 = (2, -7, -1, -1)$.

907. Supposant l'indépendance linéaire des vecteurs $A_1, A_2, \ldots, A_m$ donner les formules permettant de calculer les longueurs des composantes du vecteur du problème n° 906, posé sous forme générale.

908. Démontrer que de tous les vecteurs d'un espace donné P, c'est la projection orthogonale du vecteur X sur l'espace P qui forme le plus petit angle avec le vecteur donné X.

909. Trouver le plus petit angle entre les vecteurs de l'espace P, engendré par les vecteurs $A_1, \ldots, A_m$, et le vecteur X:

a) $X = (1, 3, -1, 3), \quad A_1 = (1, -1, 1, 1),$
$A_2 = (5, 1, -3, 3);$

b) $X = (2, 2, -1, 1), \quad A_1 = (1, -1, 1, 1),$
$A_2 = (-1, 2, 3, 1), \quad A_3 = (1, 0, 5, 3).$

910. Trouver le plus petit angle formé par le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$ et les vecteurs d'un espace à m dimensions.

911. Démontrer que de tous les vecteurs $X - Y$, où X est un vecteur donné et Y parcourt l'espace donné P, le vecteur $X - X'$, où X' est la projection orthogonale de X sur P, a la plus petite longueur. (Cette plus petite longueur est appelée la distance du point X à l'espace P.)

912. Déterminer la distance du point X à la variété linéaire $A_0 + t_1A_1 + \ldots + t_mA_m$:

a) $X = (1, 2, -1, 1), \quad A_0 = (0, -1, 1, 1),$
$A_1 = (0, -3, -1, 5), \quad A_2 = (4, -1, -3, 3);$

b) $X = (0, 0, 0, 0), \quad A_0 = (1, 1, 1, 1), \quad A_1 = (1, 2, 3, 4).$

913. On considère un espace de polynômes dont les degrés ne sont pas supérieurs à n. Le produit scalaire des polynômes f_1, f_2 est défini par $\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$. Trouver la distance de l'origine des coordonnées à la variété linéaire formée par les polynômes $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

914. Indiquer un procédé pour déterminer la plus petite distance entre les points de deux variétés linéaires $X_0 + P$ et $Y_0 + Q$.

915. Les sommets d'un simplexe régulier à n dimensions (cf. problème n° 897), dont l'arête est de longueur unité, sont partagés en deux ensembles de $m + 1$ et $n - m$ sommets. On fait passer par ces ensembles de sommets des variétés linéaires de dimension la plus petite. Déterminer la distance la plus courte entre les points de ces variétés et les points pour lesquels elle est réalisée.

***916.** Soit dans l'espace à quatre dimensions deux plans engendrés par les vecteurs A_1, A_2 et B_1, B_2. Trouver le plus petit des angles formés par les vecteurs du premier plan et les vecteurs du deuxième plan :

a) $A_1 = (1, 0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 0)$, $B_1 = (1, 1, 1, 1)$, $B_2 = (2, -2, 5, 2)$;

b) $A_1 = (1, 0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 0)$, $B_1 = (1, 1, 1, 1)$, $B_2 = (1, -1, 1, -1)$.

***917.** Un cube à quatre dimensions est coupé par un « plan » à trois dimensions passant par son centre et orthogonal à sa diagonale. Déterminer la forme du corps obtenu à l'intersection.

***918.** Soit donné un système de vecteurs linéairement indépendants $B_1, B_2, \ldots, B_m$. L'ensemble des points représentant les extrémités des vecteurs $t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_mB_m$, $0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant t_m \leqslant 1$, est appelé le parallélépipède construit sur les vecteurs $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Déterminer par induction le volume du parallélépipède comme le volume de la « base » $[B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}]$ multiplié par la « hauteur » égale à la distance de l'extrémité du vecteur B_m à l'espace engendré par la base. Le « volume » du « parallélépipède » à une dimension $[B_1]$ est supposé égal à la longueur du vecteur B_1.

a) Etablir la formule de calcul du carré du volume et s'assurer que le volume ne dépend pas de la numérotation des sommets.

b) Démontrer que $V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$.

c) Démontrer que $V[B_1' + B_1'', B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$ et élucider les conditions pour lesquelles on a l'égalité.

919. Démontrer que le volume d'un parallélépipède à n dimensions dans l'espace à n dimensions est égal à la valeur absolue du déterminant formé à partir des coordonnées des vecteurs générateurs.

***920.** Soient $C_1, C_2, \ldots, C_m$ les projections orthogonales des vecteurs $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sur un certain espace. Démontrer que

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

***921.** Démontrer que

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$$

(cf. problème n° 518).

922. Démontrer que

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m] \leqslant |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_m|$$

(cf. problème n° 519).

923. Trouver le volume d'une sphère à n dimensions en utilisant le principe de Cavalieri.

924. Considérons un espace de polynômes de degrés non supérieurs à n. Par produit scalaire on entend $\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx$. Trouver le volume du parallélépipède formé par les vecteurs de la base par rapport à laquelle les coefficients du polynôme représentent ses coordonnées.

§ 3. Valeurs caractéristiques et vecteurs propres d'une matrice

925. Trouver les valeurs caractéristiques et les vecteurs propres des matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

926. Les valeurs caractéristiques de la matrice A étant connues, trouver les valeurs caractéristiques de la matrice A^{-1}.

927. Les valeurs caractéristiques de la matrice A étant connues, trouver les valeurs caractéristiques de la matrice A^2.

928. Les valeurs caractéristiques de la matrice A étant connues, trouver les valeurs caractéristiques de la matrice A^m.

929. Le polynôme caractéristique $F(\lambda)$ de la matrice A (d'ordre n) étant connu, trouver le déterminant de la matrice $f(A)$, où $f(x) = b_0(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$.

930. Les valeurs caractéristiques de la matrice A étant connues, trouver le déterminant de la matrice $f(A)$, où $f(x)$ est un polynôme.

931. Les valeurs caractéristiques de la matrice A étant connues, trouver les valeurs caractéristiques de la matrice $f(A)$.

932. Démontrer que tous les vecteurs propres de la matrice A sont les vecteurs propres de la matrice $f(A)$.

***933.** Trouver les valeurs caractéristiques de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, n est un nombre impair.

***934.** Trouver la somme

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \dots + \varepsilon^{(n-1)^2}.$$

935. Trouver les valeurs caractéristiques des matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & & & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

***936.** Les valeurs caractéristiques des matrices A et B étant connues, trouver les valeurs caractéristiques de leur produit kroneckérien.

937. Démontrer que les polynômes caractéristiques des matrices AB et BA coïncident pour n'importe quelles matrices carrées A et B.

938. Démontrer que les polynômes caractéristiques des matrices AB et BA ne diffèrent que par le facteur $(-\lambda)^{n-m}$. Ici A est une matrice rectangulaire à m lignes et n colonnes et la matrice B est formée de n lignes et m colonnes, $n > m$.

§ 4. Formes quadratiques et matrices symétriques

939. Réduire les formes quadratiques

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$;

c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;

d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 +$
$$+ 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2;$$

e) $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$

à une somme de carrés.

940. Réduire la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<k} x_ix_k$$

à la forme diagonale.

941. Réduire la forme quadratique

$$\sum_{i<k} x_ix_k$$

à la forme diagonale.

942. Démontrer que tous les mineurs principaux d'une forme quadratique positive sont positifs.

***943.** Supposons que la forme quadratique

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n &+ \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

peut être réduite à la forme diagonale $\alpha_1x_1'^2 + \alpha_2x_2'^2 + \ldots + \alpha_nx_n'^2$ par la transformation « triangulaire »

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \\ x_2' &= \qquad\quad x_2 + \ldots + b_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \qquad\qquad\qquad\quad x_n. \end{aligned}$$

On demande:

a) d'exprimer les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ par les coefficients a_{ik};

b) d'exprimer les discriminants des formes $f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f - \alpha_1x_1'^2 - \ldots - \alpha_kx_k'^2$ par les coefficients a_{ik}.

Trouver la condition pour laquelle la transformation triangulaire de la forme indiquée est possible.

944. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n &+ \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

soit positive est que les inégalités

$$a_{11}>0; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0; \ldots; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

soient vérifiées (conditions de Sylvester).

***945.** Démontrer que si on ajoute à une forme quadratique positive le carré d'une forme linéaire, son discriminant augmente.

***946.** Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \ldots$ une forme quadratique positive,

$$\varphi(x_2, \ldots x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n),$$

D_f et D_φ leurs discriminants. Démontrer que

$$D_f \leqslant a_{11}D_\varphi.$$

947. Soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \ldots - l_{p+q}^2,$$

où $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ sont des formes linéaires réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Démontrer que dans la représentation canonique de la forme f le nombre de carrés positifs et le nombre de carrés négatifs ne sont pas supérieurs respectivement à p et q.

***948.** Soient $s_0, s_1, \ldots$ des sommes des puissances des racines de l'équation $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ à coefficients réels. Démontrer que le nombre de carrés négatifs dans la représentation canonique de la forme quadratique $\sum_{i,k=1}^{n} s_{i+k+2}x_ix_k$ est égal au nombre de couples de racines complexes conjuguées de l'équation donnée.

Démontrer les théorèmes:

949. Pour que toutes les racines d'une équation à coefficients réels soient réelles et distinctes, il faut et il suffit que les inégalités

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}>0; \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}>0; \ldots; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}>0$$

soient vérifiées.

***950.** Si les formes quadratiques

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n &+ \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n &+ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 & \end{aligned}$$

et

$$\varphi = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{1n}x_1x_n + \\ + b_{21}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{2n}x_2x_n + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + \dots + b_{nn}x_n^2$$

sont non négatives, la forme

$$(f, \varphi) = a_{11}b_{11}x_1^2 + a_{12}b_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}b_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}b_{21}x_2x_1 + a_{22}b_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}b_{2n}x_2x_n + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + a_{n1}b_{n1}x_nx_1 + a_{n2}b_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}b_{nn}x_n^2$$

est non négative.

951. Réduire à la forme canonique par une transformation orthogonale les formes quadratiques:

a) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

b) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

c) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

e) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;

f) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

g) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

h) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$;

i) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$;

j) $2x_1x_2 + 2x_3x_4$;

k) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;

l) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;

m) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$;

n) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

· **952.** Réduire à la forme canonique par une transformation orthogonale les formes quadratiques:

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<k} x_ix_k$; b) $\sum_{i<k} x_ix_k$.

953. Réduire à la forme canonique par une transformation orthogonale la forme $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$.

954. Démontrer que si toutes les valeurs caractéristiques de la matrice symétrique réelle A sont comprises dans le segment $[a, b]$, la forme quadratique de matrice $A - \lambda E$ est négative pour $\lambda > b$ et positive pour $\lambda < a$. La réciproque est également vraie.

955. Démontrer que si toutes les valeurs caractéristiques de la matrice symétrique réelle A sont comprises dans le segment $[a, c]$ et toutes les valeurs caractéristiques de la matrice symétrique réelle B dans le segment $[b, d]$, toutes les valeurs caractéristiques de la matrice $A+B$ sont comprises dans le segment $[a+b, c+d]$.

956. Nous appellerons norme de la matrice A et nous la noterons $\| A \|$ la valeur arithmétique de la racine carrée de la plus grande valeur caractéristique de la matrice $\bar{A}A$ (A est une matrice carrée réelle et $\bar{A}$ sa transposée).

Démontrer que:

a) $\| A \| = \| \bar{A} \|$;

b) $| AX | \leqslant \| A \| \cdot | X |$, l'égalité a alors lieu pour un certain vecteur X_0;

c) $\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|$;

d) $\| AB \| \leqslant \| A \| \cdot \| B \|$;

e) les modules de toutes les valeurs caractéristiques de la matrice A ne sont pas supérieurs à $\| A \|$.

957. Démontrer que toute matrice non singulière réelle peut être représentée sous forme du produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

à éléments diagonaux b_{ii} positifs et que cette représentation est unique.

958. Démontrer que toute matrice non singulière réelle peut être représentée sous la forme du produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique associée à une certaine forme quadratique positive.

959. Soit dans l'espace à n dimensions une surface du second degré donnée par l'équation

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n &+ \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n &+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 &+ \\ + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \quad + 2b_nx_n + c &= 0, \end{aligned}$$

ou encore $AX \cdot X + 2B \cdot X + c = 0$. Démontrer que pour l'existence du centre de la surface, il faut et il suffit que le rang de la matrice A soit égal au rang de la matrice (A, B).

960. Démontrer que l'équation d'une surface centrale du second degré peut être réduite, par une translation de l'origine et une transformation orthogonale, à la forme canonique

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \gamma = 0.$$

961. Démontrer que l'équation d'une surface non centrale du second degré peut être réduite, par une translation de l'origine et une transformation orthogonale, à la forme canonique

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 = 2x_{r+1}.$$

§ 5. Applications linéaires. Forme canonique de Jordan

962. Etablir que la dimension du sous-espace, image de tout l'espace par application linéaire, est égale au rang de la matrice de cette application.

963. Soit Q un sous-espace de dimension q de l'espace R de dimension n et soit Q' l'image de Q par une application linéaire de rang r de l'espace R. Démontrer que la dimension q' de l'espace Q' vérifie les inégalités:

$$q + r - n \leqslant q' \leqslant \min(q, r).$$

964. Utilisant le résultat du problème n°963, établir que le rang ρ du produit de deux matrices de rangs r_1 et r_2 vérifie les inégalités:

$$r_1 + r_2 - n \leqslant \rho \leqslant \min(r_1, r_2).$$

***965.** Soient P et Q des sous-espaces de l'espace R réciproquement complémentaires. Dans ce cas tout vecteur $X \in R$ se décompose de façon unique en une somme des vecteurs $Y \in P$ et $Z \in Q$. La transformation qui est le passage du vecteur X à sa composante Y est appelée projection sur P parallèlement à Q. Démontrer que la projection est une application linéaire et que sa matrice A (quelle que soit la base) vérifie la condition $A^2 = A$. Inversement, chaque application linéaire, dont la matrice vérifie la condition $A^2 = A$, est une projection.

***966.** Une projection est dite orthogonale si $P \perp Q$. Démontrer que quelle que soit la base orthonormale choisie, la matrice de projection orthogonale est symétrique. Inversement, chaque matrice symétrique dont les puissances coïncident est une matrice de projection orthogonale.

***967.** Démontrer que toutes les valeurs caractéristiques non nulles d'une matrice antisymétrique sont purement imaginaires et que les parties réelle et imaginaire des vecteurs propres correspondants sont égales en longueur et orthogonales.

***968.** Démontrer que pour une matrice antisymétrique A on peut trouver une matrice orthogonale P telle que

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & a_2 & & & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & a_k & & & \\ & & & & & -a_k & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(tous les éléments omis sont égaux à zéro; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des nombres réels).

969. Démontrer le théorème suivant : si A est une matrice antisymétrique, la matrice $(E - A)(E + A)^{-1}$ est une matrice orthogonale n'ayant pas de valeur caractéristique égale à -1. Inversement, chaque matrice orthogonale n'ayant pas de valeur caractéristique égale à -1 peut être représentée sous cette forme.

***970.** Démontrer que les modules de toutes les valeurs caractéristiques d'une matrice orthogonale sont égaux à 1.

***971.** Démontrer que les vecteurs propres d'une matrice orthogonale associés à une valeur caractéristique complexe sont de la forme $X + iY$, où X, Y sont des vecteurs réels égaux en longueur et orthogonaux.

***972.** Démontrer que chaque matrice orthogonale peut être représentée sous la forme :

$$Q^{-1}TQ,$$

où Q est une matrice orthogonale et T est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & & & & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & & & & & & & & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

(tous les éléments omis sont égaux à zéro).

973. Réduire à la forme normale de Jordan les matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

974. Réduire à la forme normale de Jordan les matrices

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

***975.** Démontrer que toute matrice périodique A (vérifiant la condition $A^m = E$ pour un nombre naturel m quelconque) peut être réduite à la forme canonique diagonale.

***976.** Connaissant les valeurs caractéristiques de la matrice A, trouver les valeurs caractéristiques de la matrice A'_m, formée des mineurs d'ordre m de la matrice A disposés convenablement (cf. problème n° 531).

977. Démontrer que toute matrice A peut être transformée en sa transposée.

***978.** Démontrer que toute matrice peut être représentée sous la forme du produit de deux matrices symétriques, dont l'une est non singulière.

979. Etant donnée une matrice A d'ordre n, construisons une suite de matrices par le procédé suivant:

$$\begin{array}{lll}
A_1 = A\,; & \operatorname{Tr} A_1 = p_1\,; & A_1 - p_1E = B_1, \\
B_1A = A_2\,; & \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A_2 = p_2\,; & A_2 - p_2E = B_2, \\
B_2A = A_3\,; & \frac{1}{3}\operatorname{Tr} A_3 = p_3\,; & A_3 - p_3E = B_3, \\
\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
B_{n-1}A = A_n\,; & \frac{1}{n}\operatorname{Tr} A_n = p_n\,; & A_n - p_nE = B_n,
\end{array}$$

où $\operatorname{Tr} A_i$ est la trace de la matrice A_i (la somme des éléments diagonaux). Démontrer que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A écrit sous la forme $(-1)^n [\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n]$; la matrice B_n est une matrice nulle; enfin, si A est non singulière, on a

$$\frac{1}{p_n} B_{n-1} = A^{-1}.$$

***980.** Pour que l'équation $XY - YX = C$ soit résoluble en matrices carrées X, Y, il faut et il suffit que la trace de la matrice C soit nulle. Démontrer.

PARTIE II

INDICATIONS

Chapitre premier

NOMBRES COMPLEXES

11. Cf. problème nº 10.

13. Montrer que le théorème est vrai pour chacune des quatre opérations effectuées sur deux nombres et utiliser le principe de récurrence.

18. Utiliser le fait qu'il est facile de représenter les premiers membres sous forme de somme de deux carrés.

27. Poser $x = a + bi$, $y = c + di$.

28. Poser $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

31. Poser $z = t^2$; $z' = t'^2$. Recourir au problème nº 27.

37. Passer à la forme trigonométrique.

38. $1 + \omega = -\omega^2$.

40. Passer au demi-angle.

41. S'assurer que $z = \cos\theta \pm i \sin\theta$; $\frac{1}{z} = \cos\theta \mp i \sin\theta$. Utiliser la formule de Moivre.

51. Poser $\alpha = \cos x + i \sin x$. Alors $\cos^{2m} x = \left(\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}\right)^{2m}$ et ainsi de suite.

52. Montrer que le coefficient de $(2 \cos x)^{m-2p}$ est égal à $(-1)^p (C^p_{m-p} + C^{p-1}_{m-p-1})$. Utiliser le principe de récurrence.

53. Le problème est analogue au précédent.

54. Utiliser le développement, suivant la formule du binôme de Newton, de $(1 + i)^n$.

55. Recourir au problème précédent.

56. Développer, suivant la formule du binôme de Newton, $\left(1 + i\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$.

68. Montrer que le problème se ramène au calcul de la limite de la somme $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots$, où $\alpha = \frac{-1+i}{2}$.

69. Utiliser le fait que $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$.

71. Utiliser le fait que

$$\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha}{4} + \frac{3\cos\alpha}{4}; \qquad \sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha}{4} - \frac{\sin 3\alpha}{4}.$$

72. Pour calculer les sommes de la forme $1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}$ et $1 + 2^2a + 3^2a^2 + \ldots + n^2a^{n-1}$ il est utile de les multiplier au préalable par $1 - a$.

76. $x_1 = \alpha + \beta$; $x_2 = \alpha\omega + \beta\omega^2$; $x_3 = \alpha\omega^2 + \beta\omega$; $\alpha^3 + \beta^3 = -q$, $3\alpha\beta = -p$.

77. Multiplier par -27 et considérer le premier membre comme le discriminant d'une équation du troisième degré.

78. Poser $x = \alpha + \beta$.

87. Montrer que $\varepsilon^n = -1$.

88. Si $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, la somme cherchée peut s'écrire sous la forme $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

89. Considérer deux cas: 1) k est divisible par n;

2) k n'est pas divisible par n.

91, 92. Multiplier par $1-\varepsilon$.

94. a) De la somme de toutes les racines d'ordre 15 de l'unité retrancher la somme des racines appartenant aux exposants 1, 3 et 5.

97. La longueur du côté d'un polygone régulier à 14 côtés de rayon 1 est égale à $2\sin\frac{\pi}{14}$. Utiliser le fait que l'équation $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$ est vérifiée par $\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}$.

98. 1) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, alors $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

2) Si ε est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, $\bar{\varepsilon}$, nombre complexe conjugué de ε, est aussi une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

99. Poser, dans les identités obtenues dans le résultat du problème n° 98, $x = 1$.

100. Utiliser la décomposition de $x^n - 1$ en facteurs du premier degré.

101. Poser pour la décomposition de $x^n - 1$ en facteurs linéaires: 1) $x = \cos\theta + i\sin\theta$; 2) $x = \cos\theta - i\sin\theta$.

103. Prendre en considération le fait que les modules de nombres complexes conjugués sont égaux.

105. a) Ramener l'équation à la forme $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m = 1$.

107. Soit

$$S = \cos\varphi + C_n^1\cos(\varphi+\alpha)x + \ldots + \cos(\varphi+n\alpha)x^n,$$
$$T = \sin\varphi + C_n^1\sin(\varphi+\alpha)x + \ldots + \sin(\varphi+n\alpha)x^n.$$

Calculer $S+Ti$ et $S-Ti$ et déterminer S des égalités obtenues.

113. Démontrer au préalable que $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$ si p est un nombre premier. A cette fin calculer la quantité de nombres non supérieurs à p^α et divisibles par p.

116. Démontrer que toutes les racines de $x^{p^{m-1}} - 1$ et seulement elles ne sont pas des racines primitives de $x^{p^m} - 1$.

117. Démontrer que si n est impair, il suffit de multiplier toutes les racines primitives d'ordre n par -1 pour obtenir toutes les racines primitives d'ordre $2n$ de l'unité.

119. Utiliser le problème n° 118.

120. Utiliser les problèmes nos 115, 116, 111 et montrer que 1) $\mu(p) = -1$ si p est un nombre premier; 2) $\mu(p^\alpha) = 0$ si p est un nombre premier, $\alpha > 1$; 3) $\mu(ab) = \mu(a)\cdot\mu(b)$ si a et b sont premiers entre eux.

122. Montrer que si $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ appartient à l'exposant n_1, alors $x - \varepsilon_k$ entre dans le second membre de l'égalité à démontrer avec la puissance $\sum\mu(d_1)$, où d_1 parcourt tous les diviseurs de $\frac{n}{n_1}$.

123. Considérer les cas suivants : 1) n est la pusissance d'un nombre premier ; 2) n est le produit des puissances de nombres premiers distincts. Pour le cas 1) utiliser le problème nº 116, pour 2) les problèmes nºs 119 et 122.

124. Considérer les cas suivants : 1) n est impair, plus grand que 1 ; 2) $n = 2^k$; 3) $n = 2n_1$, n_1 est impair, plus grand que 1 ; 4) $n = 2^k \cdot n_1$, où $k > 1$. n_1 est impair, plus grand que 1.

125. Utiliser l'identité

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}{2}.$$

Considérer les cas suivants : 1) n est impair ; 2) $n = 2n_1$, n_1 est impair ; 3) $n = 2^k n_1$, où $k > 1$, n_1 est impair.

126. Multiplier la somme S par sa somme conjuguée et prendre en considération que ε^{x^2} n'est pas modifiée quand on remplace x par $x + n$.

Chapitre 2

CALCUL DES DÉTERMINANTS

132. Prendre en considération que chaque couple d'éléments d'une permutation forme une inversion.

133. Le nombre d'inversions dans la deuxième permutation est égale au nombre d'ordres dans la première.

145. Montrer que chaque terme contient le facteur 0.

149, 150. Remplacer les lignes par les colonnes.

153. Elucider comment sera modifié le déterminant si on intervertit ses colonnes d'une manière quelconque.

154. a) Prendre en considération que pour $x = a_i$, le déterminant possède deux lignes identiques.

155. A la dernière colonne ajouter la première multipliée par 100 et la deuxième multipliée par 10.

156. Retrancher d'abord de chaque colonne la première.

163. De la deuxième colonne retrancher la première.

179. Ajouter la première ligne à toutes les autres.

180-182. Retrancher la première ligne de toutes les autres.

183. Retrancher la deuxième ligne de toutes les autres.

184. Ajouter la première ligne à la deuxième.

185. Ajouter toutes les colonnes à la première.

186, 187. Retrancher de la première colonne la deuxième, ajouter la troisième et ainsi de suite.

188. Développer suivant les éléments de la première colonne ou ajouter à la dernière ligne la première multipliée par x^n, la deuxième multipliée par x^{n-1} et ainsi de suite.

189. Ajouter à la dernière colonne la première multipliée par x^{n-1}, la deuxième multipliée par x^{n-2} et ainsi de suite.

190. Former le déterminant égal à $f(x+1) - f(x)$. Dans le déterminant ainsi obtenu retrancher de la dernière colonne la première, la deuxième multipliée par x, la troisième multipliée par x^2 et ainsi de suite.

191. Multiplier la dernière colonne par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et la retrancher respectivement de la $1^{\text{ère}}, 2^{\text{ème}}, \ldots, n^{\text{ème}}$ colonne.

192. Ajouter toutes les colonnes à la première.

194. Ajouter toutes les colonnes à la dernière.

195. Mettre a_1 en facteur commun de la première colonne, a_2 de la deuxième et ainsi de suite. Ajouter à la dernière colonne toutes les précédentes.

196. Mettre h en facteur commun de la première colonne; ajouter la première colonne à la deuxième.

197. Multiplier la première ligne et la première colonne par x.

198. De chaque ligne retrancher la première multipliée successivement par $a_1, a_2, \ldots, a_n$. De chaque colonne retrancher la première multipliée successivement par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

199. Ajouter toutes les colonnes à la première.

200. Ajouter à la première colonne toutes les autres.

201. De chaque colonne, en commençant par la dernière, retrancher la colonne précédente multipliée par a.

202. De chaque ligne, en commençant par la dernière, retrancher la précédente. Ajouter ensuite à chaque colonne la première.

203. Multiplier la première ligne par b_0, la deuxième par b_1 et ainsi de suite. Ajouter à la première ligne toutes les autres.

204. Sortir a de la première ligne et retrancher de la deuxième ligne la première.

205. Développer suivant les éléments de la première ligne.

206. Représenter sous forme de somme de deux déterminants.

208. A chaque élément en dehors de la diagonale principale ajouter 0 et représenter le déterminant sous forme de somme de 2^n déterminants. Utiliser le problème n° 206 ou n° 207.

211. Multiplier la première colonne par x^{n-1}, la deuxième par x^{n-2} et ainsi de suite.

212. Développer suivant les éléments de la dernière colonne et montrer que $\Delta_n = x_n\Delta_{n-1} + a_n x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ (Δ_n signifie le déterminant d'ordre n). Pour calculer le déterminant, utiliser le principe de récurrence.

213. Développer suivant les éléments de la dernière colonne et montrer que $\Delta_{n+1} = x_n\Delta_n + a_n y_1 y_2 \ldots y_n$.

214. Sortir a_1 de la deuxième colonne, a_2 de la troisième, ..., a_n de la $(n+1)^{\text{ème}}$. Changer le signe de la première colonne et ajouter toutes les colonnes à la première.

215. Développer suivant les éléments de la première ligne.

216. Développer suivant les éléments de la première ligne et montrer que $\Delta_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} - \Delta_{n-1}$.

219. Utiliser le résultat du problème n° 217.

221. Développer suivant les éléments de la première ligne et montrer que $\Delta_n = x\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

222. Retrancher de la dernière ligne l'avant-dernière multipliée par $\frac{y_n}{y_{n-1}}$. Montrer que

$$\Delta_n = \frac{y_n}{y_{n-1}} (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) \Delta_{n-1}.$$

223. Représenter sous forme de somme de deux déterminants et montrer que

$$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}.$$

225. Représenter sous forme de somme de deux déterminants et montrer que

$$\Delta_n = (a_n - x)\Delta_{n-1} + x(a_1 - x) \ldots (a_{n-1} - x).$$

226. Posant $x_n = (x_n - a_n) + a_n$, représenter le déterminant sous forme de somme de deux déterminants et montrer que

$$\Delta_n = (x_n - a_n)\Delta_{n-1} + a_n (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \ldots (x_{n-1} - a_{n-1}).$$

227. Représenter sous forme de somme de deux déterminants et montrer que

$$\Delta_n = (x_n - a_n b_n)\Delta_{n-1} + a_n b_n (x_1 - a_1 b_1) \ldots (x_{n-1} - a_{n-1} b_{n-1}).$$

228. Représenter sous forme de somme de deux déterminants et montrer que

$$\Delta_n = -m\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1} m^{n-1} x_n.$$

230. Développer suivant les éléments de la première ligne et montrer que

$$\Delta_{2n} = (a^2 - b^2)\Delta_{2n-2}.$$

231. Retrancher de chaque ligne la précédente et ajouter à la deuxième ligne toutes les suivantes. Ensuite, développant le déterminant suivant les éléments de la dernière ligne, montrer que

$$\Delta_n = [a + (n-1)\, b]\, \Delta_{n-1} + a\,(a+b)\, \ldots\, [a + (n-2)\, b].$$

232. Représenter sous forme de somme de deux déterminants et montrer que

$$\Delta_n = x\,(x - 2a_n)\,\Delta_{n-1} + a_n^2 x^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x - 2a_i).$$

233. Posant $(x-a_n)^2 = x\,(x-2a_n) + a_n^2$, représenter le déterminant sous forme de somme de deux déterminants et montrer que

$$\Delta_n = x\,(x-2a_n)\,\Delta_{n-1} + a_n^2 x^{n-1}\,(x-2a_1)\,\ldots\,(x-2a_{n-1}).$$

234. Représenter sous forme de somme de deux déterminants et démontrer que

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + (-1)^n b_1 b_2 \ldots b_n.$$

235. Représenter le dernier élément de la dernière ligne sous la forme $a_n - a_n$. Démontrer que

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1} a_n - a_n \Delta_{n-1}.$$

236. De chaque ligne retrancher la suivante.

237. Poser dans l'angle supérieur gauche $1 = x + (1 - x)$. Représenter le déterminant sous forme de somme de deux déterminants. Utiliser le résultat du problème n° 236.

238. Multiplier la deuxième ligne par x^{n-1}, la troisième par x^{n-2}, ..., la $n^{\text{ème}}$ par x. Sortir x^n de la première colonne, x^{n-1} de la deuxième, ..., x de la $n^{\text{ème}}$.

239. Utiliser l'indication du problème précédent.

240. De chaque colonne, en commençant par la dernière, retrancher la précédente. Ensuite, de chaque ligne retrancher la précédente. Démontrer que $\Delta_n = \Delta_{n-1}$. Au cours du calcul prendre en considération que $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

241. De chaque colonne retrancher la précédente.

242. De chaque ligne retrancher la précédente. Démontrer que $\Delta_n = \Delta_{n-1}$.

243. Sortir m de la $1^{\text{ère}}$ ligne, $m+1$ de la deuxième, ..., $m+n$ de la dernière. Sortir $\frac{1}{k}$ de la $1^{\text{ère}}$ colonne, $\frac{1}{k+1}$ de la $2^{\text{ème}}$ et ainsi de suite. Répéter cette opération jusqu'à ce que tous les éléments de la première colonne deviennent égaux à 1.

244. Retrancher de chaque colonne la précédente. Dans le déterminant obtenu retrancher de chaque colonne la précédente, conservant intactes les deux premières. Retrancher à nouveau de chaque colonne la précédente, conservant intactes les trois premières et ainsi de suite. Après m opérations de ce genre on obtiendra un déterminant dont tous les éléments de la dernière colonne sont égaux à 1. Le calcul de ce déterminant ne présente pas de difficultés particulières.

245. De chaque ligne retrancher la précédente et montrer que

$$\Delta_{n+1} = (x-1)\,\Delta_n.$$

246. De chaque ligne retrancher la précédente et montrer que

$$\Delta_{n+1} = (n-1)!\,(x-1)\,\Delta_n.$$

247. De chaque ligne retrancher la précédente, de chaque colonne retrancher la précédente. Démontrer que $\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1}$.

248. Représenter le dernier élément de la dernière ligne sous la forme $z + (x - z)$. Représenter le déterminant sous forme de somme de deux déterminants. Utiliser le fait que le déterminant est symétrique par rapport à y et z.

249. Cf. l'indication du problème nº 248.

252. De chaque ligne retrancher la première multipliée par $\frac{\beta}{a}$. Dans le déterminant obtenu sortir $\frac{ab-\lambda\beta}{a(\alpha-\beta)}$ de la première colonne et de la première colonne retrancher toutes les autres.

253. Ajouter toutes les colonnes à la première et de chaque ligne retrancher la précédente. Cf. le problème nº 199.

254. Utiliser l'indication du problème précédent.

256. Considérer le déterminant comme un polynôme du quatrième degré en a. Montrer que le polynôme recherché est divisible par les polynômes suivants du 1^er^ degré par rapport à a:

$$a+b+c+d;\ a+b-c-d;\ a-b+c-d;\ a-b-c+d.$$

258. Ajoutant toutes les colonnes à la première, dégager le facteur $x + a_1 + \ldots + a_n$. Posant ensuite $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$, s'assurer que le déterminant est divisible par $x - a_1, x - a_2, \ldots, x - a_n$.

259. Le déterminant de Vandermonde.

264. Développer suivant les éléments de la première colonne.

265. Retrancher de la deuxième ligne la première. Dans le déterminant obtenu retrancher de la troisième ligne la deuxième et ainsi de suite.

269. Sortir $\frac{1}{2!}$ de la troisième ligne, $\frac{1}{3!}$ de la quatrième et ainsi de suite.

270. Utiliser le résultat du problème nº 269.

271. De la deuxième colonne sortir 2, de la troisième 3 et ainsi de suite. Pour calculer $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(i^2-k^2)$ il est utile de le représenter sous la forme $\Pi\,(i^2-k^2) = \Pi\,(i-k)\,\Pi\,(i+k)$.

272. Sortir $\frac{x_1}{x_1-1}$ de la première colonne; $\frac{x_2}{x_2-1}$ de la deuxième et ainsi de suite.

273. Sortir a_1^n de la première ligne, a_2^n de la deuxième et ainsi de suite.

275. Ajouter à la première colonne la deuxième multipliée par C_{2n}^1, la troisième multipliée par C_{2n}^2 et ainsi de suite.

276. Utiliser le résultat du problème nº 51.

277. Recourir au problème nº 53.

278. Adjoindre la ligne $1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et la colonne $1, 0, 0, \ldots, 0$.

279. Considérer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & z \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 & z^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & z^n \end{vmatrix}.$$

Comparer le développement de D suivant les éléments de la dernière colonne avec l'expression $D = \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i - x_k)\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(z - x_i)$.

280. Utiliser l'indication du problème précédent.

282. Adjoindre une première ligne $1, 0, \ldots, 0$ et une première colonne $1, 1, 1, \ldots, 1$. Retrancher la première colonne de toutes les suivantes.

285. Développer suivant les éléments de la dernière ligne.

286. Retrancher de chaque colonne, en commençant par la dernière, la précédente multipliée par x. Ensuite, après avoir abaissé l'ordre du déterminant et sorti les facteurs évidents, transformer les premières lignes (dépendant de x), en utilisant la relation

$$(m+1)^s - m^s = sm^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} m^{s-2} + \ldots + 1.$$

287. Retrancher de chaque colonne, à commencer par la dernière, la précédente multipliée par x.

288. m) Ajouter à la première colonne la sixième et la onzième, à la deuxième colonne la septième et la douzième, . . ., à la cinquième colonne la dixième et la quinzième. Ajouter à la sixième colonne la onzième, à la septième colonne la douzième, . . ., à la dixième colonne la quinzième.

Retrancher de la quinzième ligne la dixième, de la quatorzième ligne la neuvième, . . ., de la sixième ligne la première.

293. Considérer

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^n & b_1^n & \ldots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \ldots & b_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

294. Considérer

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \ldots & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \ldots & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

295. Considérer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

296. Elever au carré.

297. Retrancher de la troisième colonne la première, de la quatrième la deuxième. Ensuite multiplier par

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix}.$$

298. Retrancher de la deuxième colonne n fois la première, de la quatrième n fois la deuxième. Intervertir la deuxième et la troisième colonne. Multiplier par

$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi & 0 & 0 \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n+1)\varphi & -\sin(n+1)\varphi \\ 0 & 0 & \sin(n+1)\varphi & \cos(n+1)\varphi \end{vmatrix}$$

299. Elever au carré. Transformer comme un déterminant de Vandermonde et ramener chaque différence au sinus d'un certain angle. On déterminera ainsi le signe.

300. Etudier le produit:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 \; . \; . & a_{n-2} \\ . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{n-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

où $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

308. Considérer $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Dans ce cas

$$|\Delta = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_1^j + \varepsilon_1^{-j}}{2}\varepsilon_1^{2k(j-1)}\right).$$

311. Utiliser le problème nº 92.

314. $$\prod_{k=0}^{2n-1}(a_0 + a_1\varepsilon_k + a_2\varepsilon_k^2 + \ldots + a_{2n-1}\varepsilon_k^{2n-1}) =$$

$$= \prod_{r=0}^{n-1}[(a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n+1})\,\alpha_r + \ldots + (a_{n-1} + a_{2n-1})\,\alpha_r^{n-1}] \times$$

$$\times \prod_{s=0}^{n-1}[(a_0 - a_n) + (a_1 - a_{n+1})\,\beta_s + \ldots + (a_{n-1} - a_{2n-1})\,\beta_s^{n-1}],$$

où

$$\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}; \quad \alpha_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n};$$

$$\beta_s = \cos\frac{(2s+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2s+1)\pi}{n}.$$

323. De chaque ligne retrancher la première, de chaque colonne retrancher la première.

325. Utiliser le problème nº 217.

327. Représenter sous forme de somme de déterminants ou poser $x = 0$ dans le déterminant et ses dérivées.

328. 1) De la $(2n-1)^{\text{ème}}$ ligne retrancher la $(2n-2)^{\text{ème}}$, de la $(2n-2)^{\text{ème}}$ la $(2n-3)^{\text{ème}}$, . . ., de la $(n+1)^{\text{ème}}$ la $n^{\text{ème}}$, de la $n^{\text{ème}}$ la somme de toutes les précédentes.

2) Ajouter à la $(n+i)^{\text{ème}}$ ligne la $i^{\text{ème}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

329. A chaque ligne ajouter toutes les suivantes, de chaque colonne retrancher la précédente. Démontrer que

$$\Delta_{n+1}(x) = (x-n)\,\Delta_n(x-1).$$

Chapitre 4

MATRICES

466. Utiliser le résultat du problème n° 465 e).

473. Considérer la somme des éléments diagonaux.

491. Utiliser les résultats des problèmes nos 489, 490.

492. Utiliser le résultat du problème n° 490.

494, 495. Utiliser les résultats des problèmes nos 492, 493.

496. Effectuer la démonstration par récurrence suivant le nombre de colonnes de la matrice B, démontrant au préalable que si l'adjonction d'une colonne ne modifie pas le rang de la matrice B, elle ne modifie pas non plus le rang de la matrice (A, B).

On peut effectuer la démonstration non par récurrence, mais en utilisant le théorème de Laplace.

497. Utiliser les résultats des problèmes nos 496, 492.

498. Choisir de la matrice $(E - A, E + A)$ une matrice carrée non singulière P et considérer les produits $(E - A) P$ et $(E + A) P$.

500. Utiliser le résultat du problème n° 489.

501. Démontrer qu'au problème n° 500 la représentation est unique et ramener ainsi le problème au calcul du nombre des matrices triangulaires R avec un déterminant donné k. Désignant le nombre cherché par $F_n(k)$, démontrer que si $k = a \cdot b$ pour a, b premiers entre eux, on a $F_n(k) = F_n(a) \cdot F_n(b)$. Enfin, établir par récurrence une formule pour $F_n(p^m)$, où p est un nombre premier.

505. Utiliser les résultats des problèmes nos 495, 498. Trouver la matrice P avec le plus petit déterminant possible tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale, et ensuite utiliser le résultat du problème n° 500.

517. Utiliser le théorème de Laplace et l'inégalité de Bouniakovsky.

518. Etablir l'égalité $|\overline{A}A| = |\overline{B}B| \cdot |\overline{C}C|$, supposant que la somme des produits des éléments de n'importe quelle colonne de la matrice B par les éléments correspondants de n'importe quelle colonne de la matrice C est nulle. Ensuite compléter la matrice (B, C) de facon convenable pour qu'elle devienne carrée et utiliser le résultat du problème n° 517.

523. Compléter le déterminant à gauche par une colonne dont tous les éléments sont égaux à $\frac{M}{2}$ et en haut par une ligne dont tous les éléments (excepté l'élément de l'angle) sont égaux à 0, ensuite retrancher la première colonne de toutes les autres.

527. Utiliser les résultats des problèmes nos 522, 526.

528. Etablir la relation existant entre la matrice complémentaire et la matrice inverse.

529. Pour le mineur formé des éléments des m premières lignes et des m premières colonnes de la matrice complémentaire, établir le résultat en considérant le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{m+1,1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{m+1,2} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1m} & \dots & A_{m+1,m} & \dots & A_{nm} \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

où A_{ik} sont les cofacteurs des éléments a_{ik}.

Procéder de façon analogue dans le cas général.

535. Représenter $A \times B$ comme $(A \times E_m) \cdot (E_n \times B)$.

537. Effectuer la démonstration par récurrence en examinant d'abord le cas où A_{11} est une matrice non singulière. Ramener le cas général à celui-ci en ajoutant à la matrice λE.

Chapitre 5

POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES D'UNE VARIABLE

547. a) Développer $f(x)$ suivant les puissances de $x - 3$, remplacer ensuite x par $x + 3$.

553. Dériver directement et poser $x = 1$, ensuite isoler la puissance maximale de x et poursuivre la dérivation.

555. Considérer les polynômes:

$$f_1(x) = nf(x) - xf'(x)\,;\ f_2(x) = nf_1(x) - xf_1'(x)$$

et ainsi de suite.

561. Faire la démonstration par le principe de récurrence.

562. Le zéro différent du nombre zéro d'ordre de multiplicité $(k - 1)$ du polynôme $f(x)$ est le zéro d'ordre de multiplicité $(k - 2)$ du polynôme $xf'(x)$, le zéro d'ordre de multiplicité $(k - 3)$ du polynôme $x[xf'(x)]'$ et ainsi de suite. Inversement, le zéro commun différent du nombre zéro des polynômes $f(x)$, $xf'(x)$, $x[xf'(x)]'$, . . . (en tout $k - 1$ polynômes) est le zéro d'ordre de multiplicité non inférieur à $(k - 1)$ de $f(x)$.

563. Dériver l'égalité montrant que le polynôme est divisible par sa dérivée.

567. Considérer la fonction $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ou $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

568. Lier le problème à la considération des zéros de

$$\varphi(x) = f(x)\,f'(x_0) - f'(x)\,f(x_0),$$

où x_0 est le zéro de $[f'(x)]^2 - f(x)\,f''(x)$.

569. Utiliser la solution du problème précédent et développer $f(x)$ suivant les puissances de $x - x_0$.

576. Démontrer comme le lemme de d'Alembert.

580, 581. Représenter la fonction sous la même forme que pour la démonstration du lemme de d'Alembert:

$$f(z) = f(a) + \frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k[1 + \varphi(z)]\,;\quad \varphi(a) = 0.$$

583. Trouver les zéros des polynômes et prendre en considération les coefficients des termes principaux [dans les problèmes a) et b)]. Dans le problème c) pour la recherche des zéros, il est utile de poser $x = \operatorname{tg}^2\theta$.

589. Trouver les zéros communs.

608. Démontrer au préalable que $f(x)$ n'a pas de zéros réels d'ordre de multiplicité impair.

623. Utiliser le résultat du problème nº 622.

626. Utiliser le fait que l'équation ne doit pas etre modifiée lors de la substitution de $-x$ à x et de $\dfrac{1}{x}$ à x.

627. L'équation ne doit pas être modifiée lors de la substitution de $\dfrac{1}{x}$ a x et de $1 - x$ à x.

637. Diviser par $(1 - x)^n$ et dériver $m - 1$ fois en faisant après chaque dérivation $x = 0$. Utiliser le fait que l'ordre de $N(x)$ est inférieur à m, et celui de $M(x)$ à n.

642. Recourir à la formule de Lagrange. Effectuer la division dans chaque terme du résultat et réduire les termes semblables en utilisant le résultat du problème n° 100.

644. Exprimer $f(x_0)$ par $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, en utilisant la formule d'interpolation de Lagrange, et comparer le résultat avec la condition du problème en prenant en considération l'indépendance de $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. Ensuite étudier $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, en le développant suivant les puissances de $x - x_0$.

645. Représenter le polynôme x^4 par ses valeurs à l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange.

648, 649. Former un polynôme d'interpolation par la méthode de Newton.

650. Trouver les valeurs du polynôme cherché pour $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$.

651. On peut résoudre le problème par la méthode de Newton. Autrement dit, considérer le polynôme $F(x) = xf(x) - 1$, où $f(x)$ est le polynôme cherché.

652. Considérer le polynôme $(x - a) f(x) - 1$.

653. Former le polynôme suivant la méthode de Newton, en introduisant, pour faciliter les calculs, une factorielle au dénominateur de chaque terme.

654. Considérer le polynôme $f(x^2)$, où $f(x)$ est le polynôme cherché.

655. Le plus simple est d'utiliser la formule de Lagrange

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\varphi'(x_k)}$$

($x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros du dénominateur).

656. Développer d'abord d'après la formule de Lagrange, ensuite rassembler les termes complexes conjugués.

657. e) Utiliser le problème n° 631. f) Poser $\frac{a+x}{2a} = y$.

d), h) Rechercher les développements par la méthode des coefficients indéterminés. En trouver une partie par la substitution $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ après avoir multiplié par un dénominateur commun. Ensuite dériver et poser de nouveau $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

660. Utiliser le problème n° 659. Dans l'exemple b) décomposer $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ en éléments simples.

665, 666. Utiliser le problème n° 663.

667. Dans l'exemple c) développer le polynôme suivant les puissances de $x - 1$.

668. Développer suivant les puissances de $x - 1$ (ou poser $x = y + 1$).

669. Poser $x = y + 1$ et démontrer par le principe de récurrence que tous les coefficients du dividende et du diviseur, à l'exclusion des coefficients des termes principaux, sont divisibles par p.

670, 671. Se démontre comme le théorème d'Einsenstein.

679, 680. Admettant que $f(x)$ est réductible, poser $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ et formuler une conclusion sur les valeurs des diviseurs.

681. Calculer le nombre de valeurs égales des diviseurs éventuels.

682. Utiliser le fait que $f(x)$ n'a pas de zéros réels.

683. Démontrer que le polynôme qui a plus de trois zéros entiers ne peut pas avoir comme valeur un nombre premier pour une valeur entière de la variable indépendante et appliquer cette affirmation au polynôme $f(x) - 1$.

684, 685. Utiliser le résultat du problème n° 683.

702. Former la suite de Sturm et considérer séparément les cas de n pair et impair.

707-712. Déduire les relations de récurrence entre les polynômes de degrés contigus et leurs dérivées et construire à partir d'eux une suite de Sturm. Au problème nº 708 former une suite de Sturm uniquement pour les valeurs positives de x et s'assurer de l'absence de zéros négatifs par d'autres considérations. Au problème nº 709 former une suite de Sturm pour les x négatifs.

713. Se rappeler que $F'(x) = 2f(x) f'''(x)$ et que $f'''(x)$ est une constante.

717. Décomposer $g(x)$ en facteurs et appliquer plusieurs fois de suite le résultat du problème nº 716.

718. Appliquer le résultat du problème nº 717 au polynôme x^m.

719. Si tous les zéros du polynôme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ sont réels, tous les zéros du polynôme $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ le sont aussi.

721. Multiplier par $x - 1$.

727. Démontrer par l'absurde en se basant sur le théorème de Rolle et le résultat du problème nº 581.

728. Construire le graphe de $\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ et démontrer rigoureusement que chaque zéro de $[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)$ donne un point extrémal pour $\psi(x)$ et inversement. Démontrer que $\psi(x)$ n'admet pas de points extrémaux dans les intervalles compris entre les zéros de $f'(x)$ et contenant un zéro de $f(x)$ et admet un seul point extrémal dans les intervalles ne contenant pas de zéros de $f(x)$.

729. Utiliser le résultat des problèmes nºs 727 et 726.

730. Etudier le comportement de la fonction

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{x+\lambda}{\gamma}.$$

731. Se résout à l'aide du problème précédent pour $\lambda = 0$.

732. Démontrer par récurrence suivant le degré de $f(x)$, en posant $f(x) = (x+\lambda) f_1(x)$, où $f_1(x)$ est un polynôme de degré $(n-1)$.

733. Se démontre par application réitérée du résultat du problème nº 732.

734. Si tous les zéros de $f(x)$ sont positifs, la démonstration est réalisée de façon élémentaire, à savoir par récurrence suivant le degré de $f(x)$. Il convient d'inclure au nombre des hypothèses de récurrence que les zéros $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ du polynôme $b_0 + b_1wx + \ldots + b_{n-1}w^{(n-1)^2} x^{n-1}$ vérifient la condition

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \text{ et } x_i > x_{i-1}w^{-2}.$$

Pour démontrer ce théorème dans le cas général il faut représenter w^{x^2} comme la limite d'un polynôme en x dont les zéros n'appartiennent pas à l'intervalle $(0, n)$ et utiliser le résultat du problème nº 731.

735. Considérer $\left|\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}\right|$, où

$$\varphi(x) = a_0 \cos\varphi + \ldots + a_n \cos(\varphi+n\theta)\, x^n,$$
$$\psi(x) = b_0 \sin\varphi + \ldots + b_n \sin(\varphi+n\theta)\, x^n.$$

736. Considérer le module de $\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}$, où

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$
$$\psi(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n.$$

Après avoir démontré que les zéros sont réels, multiplier $\varphi(x) + i\psi(x)$ par $\alpha - \beta i$ et considérer la partie réelle. Recourir au résultat du problème nº 727.

737. Décomposer $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ en éléments simples, étudier les signes des coefficients dans le développement et étudier la partie imaginaire

$$\frac{-i\,[\varphi(x)+i\psi(x)]}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i.$$

738. Etudier la partie imaginaire de $\frac{f'(x)}{f(x)}$, en décomposant cette fraction en éléments simples.

739. Effectuer un changement de variable tel que le demi-plan donné se transforme en demi-plan $\operatorname{Im}(x) > 0$.

740. Relier au problème n° 739.

741. Décomposer $\frac{f'(x)}{f(x)}$ en éléments simples et évaluer la partie imaginaire.

743. Poser $x = yi$ et s'aider des résultats des problèmes n^{os} 736 et 737.

744, 745. Utiliser le résultat du problème n° 743.

746. Poser $x = \frac{1+y}{1-y}$ et s'aider du résultat du probleme n° 744.

747. Multiplier le polynôme par $1 - x$ et, posant $|x| = \rho > 1$, évaluer le module de $(1 - x) f(x)$.

Chapitre 6

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

772. Les côtés d'un triangle semblable au triangle donné et inscrit dans un cercle de rayon $1/2$ sont égaux aux sinus des angles du triangle donné.

800. Calculer d'abord la somme

$$\sum_{i=1}^{n} (x+x_i)^k,$$

poser ensuite $x = x_j$ et sommer suivant j de 1 à n. Enfin éliminer les termes inutiles et diviser par 2.

801. Se résout comme le problème n° 800.

805. Chaque racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité, élevée à la puissance m, donne une racine primitive $\frac{n}{d}^{\text{ème}}$, où d est le plus grand commun diviseur de m et n. A l'issue de cette opération effectuée sur toutes les racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, toutes les racines primitives $\frac{n}{d}^{\text{èmes}}$ s'obtiennent un nombre identique de fois.

806. S'aider des résultats des problèmes nos 805, 117 et 119.

807. Il faut trouver l'équation dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour cela recourir aux formules de Newton ou à la représentation des coefficients par des sommes des puissances sous forme de déterminant (problème n° 803).

808. Le problème se résout facilement par les formules de Newton ou par la représentation des sommes des puissances au moyen des fonctions symétriques fondamentales sous forme de déterminants (problème n° 802). Cependant, il est encore plus simple de multiplier l'équation par $(x-a)\cdot(x-b)$ et de calculer les sommes des puissances pour la nouvelle équation.

809. Le plus simple est de multiplier l'équation par $(x-a)\cdot(x-b)$.

818. Estimer que les zéros du polynôme $f(x)$ sont des variables indépendantes. Multiplier le déterminant des coefficients des restes par le déterminant de Vandermonde.

819. Démontrer que tous les polynômes ψ_k sont de degré $(n-1)$. Ensuite, multiplier le déterminant des coefficients de ψ_k par le déterminant de Vandermonde.

820. Se résout comme le problème n° 819.

827. Utiliser le fait que les puissances m des racines primitives n^{emes} de l'unité parcourent toutes les racines primitives $\frac{n}{d}^{\text{èmes}}$ de l'unité, où d est le plus grand commun diviseur de m et n.

828. S'aider du résultat du problème n° 827 et de ce que $R(X_m, X_n)$ est le diviseur de $R(X_m, x^n-1)$ et $R(X_n, x^m-1)$.

834, 835. Calculer $R(f', f)$.

839. Multiplier par $x-1$.

840. Multiplier par $x-1$ et s'aider du résultat du problème n° 835.

843. Calculer $R(X_n, X'_n)$. Lors du calcul des valeurs de X'_n pour les zéros de X_n représenter X_n sous la forme

$$(x^n-1)\,\Pi\,(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)},$$

en estimant que d parcourt les diviseurs réguliers de n.

844. Utiliser la relation $E'_n = E_n - x^n$.

845. Utiliser la relation

$$(nx-x-a)\,F_n - x\,(x+1)\,F'_n + \frac{(a-1)\dots(a-n)}{n!} = 0.$$

846. Utiliser les relations :

$$P_n = xP_{n-1} - (n-1)\,P_{n-2}\,; \quad P'_n = nP_{n-1}.$$

847. Utiliser les relations

$$xP'_n = nP_n + n^2P_{n-1}\,; \quad P_n = (x-2n+1)\,P_{n-1} - (n-1)^2\,P_{n-2}.$$

848. Utiliser les relations

$$(4-x^2)\,P'_n + nxP_n = 2nP_{n-1}\,; \quad P_n - xP_{n-1} + P_{n-2} = 0.$$

849. Utiliser les relations

$$P_n - 2xP_{n-1} + (x^2+1)\,P_{n-2} = 0\,; \quad P'_n = (n+1)\,P_{n-1}.$$

850. Utiliser les relations

$$P_n - (2n-1)\,xP_{n-1} + (n-1)^2\,(x^2+1)\,P_{n-2} = 0\,; \quad P'_n = n^2P_{n-1}.$$

851. Utiliser les relations

$$P_n - (2nx+1)\,P_{n-1} + n\,(n-1)\,x^2P_{n-2} = 0\,;$$
$$P'_n = (n+1)\,nP_{n-1}.$$

852. Résoudre le problème par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ecrire la relation obtenue en égalant à zéro les dérivées sous forme d'une équation différentielle par rapport au polynôme donnant le maximum et résoudre l'équation par la méthode des coefficients indéterminés.

867. Montrer au préalable qu'il n'existe qu'un nombre fini d'équations avec les propriétés indiquées pour un n donné. Montrer ensuite que les propriétés ne sont pas violées par la transformation $y = x^m$.

Chapitre 7

ALGÈBRE LINÉAIRE

884. Utiliser les résultats des problèmes nos 51, 52.

916. Il faut chercher le plus petit angle parmi les angles formés par les vecteurs du deuxième plan et leurs projections orthogonales sur le premier plan.

917. Se donner le cube dans un système de coordonnées dont l'origine est au centre et dont les axes sont parallèles aux arêtes. Ensuite, prendre pour axes les quatre diagonales orthogonales.

918. Utiliser le résultat du problème no 907.

920. Démontrer par récurrence.

921. Prendre en considération que $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m]\cdot V[B_1, \ldots, B_k]$, si $A_i \perp B_j$, et le résultat du problème précédent.

933. Trouver d'abord les valeurs caractéristiques du carré de la matrice. Ensuite, pour déterminer les signes lors de l'extraction de la racine carrée, se rappeler que la somme des valeurs caractéristiques est égale à la somme des éléments de la diagonale principale et que le produit des valeurs caractéristiques est égal au déterminant. Appliquer les résultats des problèmes nos 126 et 299.

934. Utiliser le résultat du problème no 933.

936. Utiliser les résultats des problèmes nos 537 et 930.

943. 1) Utiliser le fait que le déterminant de la transformation triangulaire est égal à l'unité.

2) Poser $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$.

945. Prendre la forme linéaire, dont le carré doit être ajouté à la forme quadratique, pour la nouvelle variable indépendante.

946. Isoler de la forme f un carré et recourir au résultat du problème no 945.

948. Considérer la forme quadratique des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$f = \sum_{k=1}^{n} (u_1 + u_2 x_k + \ldots + u_n x_k^{n-1})^2,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation donnée.

950. Décomposer f et φ en une somme de carrés et utiliser la distributivité de l'opération (f, φ).

965. Lors de la démonstration du théorème réciproque utiliser le développement

$$X = AX + (E - A)X.$$

966. Ecrire la matrice de projection dans la base qui s'obtient par réunion des bases orthonormales P et Q.

967. Vérifier que $AX \cdot X = 0$ pour n'importe quel vecteur réel X. Décomposer la valeur caractéristique et le vecteur propre en leurs parties réelles et imaginaires.

968. Multiplier à droite la matrice A par P, à gauche par P^{-1}, où P est une matrice orthogonale dont les deux premières colonnes sont composées des parties réelle et imaginaire normées du vecteur propre.

970, 971. Se rappeler que pour la matrice orthogonale A $AX \cdot AY = X \cdot Y$ pour tous les vecteurs réels X et Y.

972. On le démontre en se basant sur les résultats des problèmes n^os 970, 971 et aussi comme le problème n° 968 en se basant sur le résultat du problème n° 967.

975, 976. Passer à la forme canonique de Jordan.

978. Relier à la solution du problème précédent.

980. Pour la nécessité cf. le problème n° 473.

Pour démontrer la suffisance considérer d'abord le cas où tous les éléments diagonaux de la matrice C sont nuls. Utiliser ensuite le fait que si $C = XY - YX$, alors

$$S^{-1}CS = (S^{-1}XS)(S^{-1}YS) - (S^{-1}YS)(S^{-1}XS).$$

PARTIE III

RÉPONSES ET SOLUTIONS

Chapitre premier

NOMBRES COMPLEXES

1. $x=-\frac{4}{11}$; $y=\frac{5}{11}$.

2. $x=-2$; $y=\frac{3}{2}$; $z=2$, $t=-\frac{1}{2}$.

3. 1 si $n=4k$; i si $n=4k+1$; -1 si $n=4k+2$; $-i$ si $n=4k+3$, k est un nombre entier.
5. a) $117+44i$; b) -556; c) $-76i$.
6. Si, et seulement si,
1) aucun des facteurs n'est nul;
2) les facteurs sont de la forme $(a+bi)$ et $\lambda(b+ai)$, où λ est un nombre réel.

7. a) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\frac{2ab}{a^2+b^2}$; c) $\frac{44-5i}{318}$;

d) $\frac{-1-32i}{25}$; e) 2.

8. $2i^{n-1}$.

9. a) $x=1+i$, $y=i$; b) $x=2+i$, $y=2-i$;
c) $x=3-11i$, $y=-3-9i$, $z=1-7i$.

10. a) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) 1.

11. a) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$; b) a^3+b^3;
c) $2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+12abc$;
d) a^2-ab+b^2.

12. a) $0, 1, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) $0, 1, i, -1, -i$.

15. a) $\pm(1+i)$; b) $\pm(2-2i)$; c) $\pm(2-i)$; d) $\pm(1+4i)$;
e) $\pm(1-2i)$; f) $\pm(5+6i)$; g) $\pm(1+3i)$; h) $\pm(1-3i)$;
i) $\pm(3-i)$; j) $\pm(3+i)$;

k) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$;

l) $\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}}\pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$; m) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;

n) $\frac{\sqrt{2}(\pm 1\pm i)}{2}$; o) $i^{\alpha}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$; $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

16. $\pm(\beta-\alpha i)$.

17. a) $x_1=3-i$; $x_2=-1+2i$; b) $x_1=2+i$; $x_2=1-3i$;

c) $x_1=1-i$; $x_2=\frac{4-2i}{5}$.

18. a) $1\pm 2i$; $-4\pm 2i$; $(x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$;

b) $2\pm i\sqrt{2}$; $-2\pm 2i\sqrt{2}$; $(x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$.

19. a) $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{i}{2}$; b) $\pm 4\pm i$.

20. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}-\frac{p}{4}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}+\frac{p}{4}}$.

22. a) $\cos 0+i\sin 0$; b) $\cos\pi+i\sin\pi$;

c) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; d) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; f) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

g) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; h) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

i) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; j) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

k) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; l) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;

m) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; n) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$;

o) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; p) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Remarque : On rapporte ici l'une des valeurs possibles de l'argument.

23. a) $\sqrt{10}\,(\cos 18°26'+i\sin 18°26')$;

b) $\sqrt{17}\,(\cos 345°57'48''+i\sin 345°57'48'')$;

c) $\sqrt{5}\,(\cos 153°26'6''+i\sin 153°26'6'')$;

d) $\sqrt{5}\,(\cos 243°26'6''+i\sin 243°26'6'')$.

24. a) Une circonférence de rayon unité et de centre à l'origine.

b) Un rayon issu de l'origine et faisant un angle $\frac{\pi}{6}$ avec la direction positive de l'axe réel.

25. a) L'intérieur d'un cercle de rayon 2 et de centre à l'origine des coordonnées.

b) L'intérieur et le contour d'un cercle de rayon unité et de centre au point (0, 1).

c) L'intérieur d'un cercle de rayon unité et de centre au point (1, 1).

26. a) $x=\frac{3}{2}-2i$; b) $x=\frac{3}{4}+i$.

27. L'identité exprime le théorème connu de géométrie : la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés.

29. Si la différence des arguments de ces nombres est égale à $\pi+2k\pi$, où k est un nombre entier.

30. Si la différence des arguments de ces nombres est égale à $2k\pi$, où k est un nombre entier.

34. $\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$.

35. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

36. a) $2^{12}(1+i)$; b) $2^{9}(1-i\sqrt{3})$; c) $(2-\sqrt{3})^{12}$;

d) -64.

38. $\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$.

39. $2\cos\frac{2n\pi}{3}$.

40. Solution. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$

$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$;

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

43. a) $-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$;

b) $-1+i$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$;

c) $1+i$; $1-i$; $-1+i$; $-1-i$;

d) 1 ; -1 ; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $i\sqrt{3}$; $-i\sqrt{3}$; $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

44. a) $\sqrt[6]{5}\,(\cos 8°5'18''+i\sin 8°5'18'')\,\varepsilon_k$, où $\varepsilon_k=\cos 120°k+i\sin 120°k$, $k=0, 1, 2$;

b) $\sqrt[6]{10}\,(\cos 113°51'20''+i\sin 113°51'20'')\,\varepsilon_k$, où $\varepsilon_k=\cos 120°k+i\sin 120°k$, $k=0, 1, 2$;

c) $\sqrt[10]{13}\,(\cos 11°15'29''+i\sin 11°15'29'')\,\varepsilon_k$, où $\varepsilon_k=\cos 72°k+i\sin 72°k$, $k=0, 1, 2, 3, 4$.

45. a) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$, où $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$;

b) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right)$, où $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$;

c) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi+i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$, où $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

46. $\beta\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, où $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

47. a) S o l u t i o n. Considérons $(\cos x+i\sin x)^5$. D'après la formule de Moivre

$$(\cos x+i\sin x)^5=\cos 5x+i\sin 5x.$$

D'autre part

$$\begin{gathered}(\cos x+i\sin x)^5=\cos^5 x+5i\cos^4 x\sin x-\\ -10\cos^3 x\sin^2 x-10i\cos^2 x\sin^3 x+\\ +5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x=(\cos^5 x-\\ -10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x)+i(5\cos^4 x\sin x-\\ -10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x).\end{gathered}$$

Comparant les résultats, nous trouvons

$$\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x;$$

b) $\cos^8 x-28\cos^6 x\sin^2 x+70\cos^4 x\sin^4 x-28\cos^2 x\sin^6 x+\sin^8 x$;

c) $6\cos^5 x\sin x-20\cos^3 x\sin^3 x+6\cos x\sin^5 x$;

d) $7\cos^6 x\sin x-35\cos^4 x\sin^3 x+21\cos^2 x\sin^5 x-\sin^7 x$.

48. $\frac{2(3\operatorname{tg}\varphi-10\operatorname{tg}^3\varphi+3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1-15\operatorname{tg}^2\varphi+15\operatorname{tg}^4\varphi-\operatorname{tg}^6\varphi}$.

49. $\cos nx=\cos^n x-C_n^2\cos^{n-2}x\sin^2 x+C_n^4\cos^{n-4}x\sin^4 x-\ldots+M$,

où $M=(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n x$, si n est pair, et

$M=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\cos x\sin^{n-1}x$, si n est impair.

$$\sin nx=C_n^1\cos^{n-1}x\sin x-C_n^3\cos^{n-3}x\sin^3 x+\quad +M,$$

où $M=(-1)^{\frac{n-2}{2}}n\cos x\sin^{n-1}x$, si n est pair, et

$M=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n x$, si n est impair.

50. a) S o l u t i o n. Soit $\alpha=\cos x+i\sin x$. Alors

$$\alpha^{-1}=\cos x-i\sin x;$$

$$\alpha^k=\cos kx+i\sin kx;\quad \alpha^{-k}=\cos kx-i\sin kx.$$

Il en découle que

$$\cos kx=\frac{\alpha^k+\alpha^{-k}}{2};\qquad \sin kx=\frac{\alpha^k-\alpha^{-k}}{2i}.$$

En particulier

$$\cos x = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}; \quad \sin x = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i};$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 3\alpha^{-1} - \alpha^{-3}}{-8i} = \frac{(\alpha^3 - \alpha^{-3}) - 3(\alpha - \alpha^{-1})}{-8i};$$

$$\sin^3 x = \frac{2i \sin 3x - 6i \sin x}{-8i} = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4};$$

b) $\dfrac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}$; c) $\dfrac{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x}{16}$;

d) $\dfrac{\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10}{32}$.

52. Solution.

$$C_{m-p}^{p} + C_{m-p-1}^{p-1} = \frac{(m-p)(m-p-1)\dots(m-2p+1)}{p!} +$$
$$+ \frac{(m-p-1)\dots(m-2p+1)}{(p-1)!} =$$
$$= \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\dots(m-2p+1)}{p!}.$$

Faisons les notations suivantes: $2 \cos mx = S_m$; $2 \cos x = a$. Dans ce cas, l'égalité qui nous intéresse peut s'écrire de la manière suivante:

$$S_m = a^m - ma^{m-2} + (C_{m-2}^2 + C_{m-3}^1)a^{m-4} - \dots$$
$$\dots + (-1)^p (C_{m-p}^p + C_{m-p-1}^{p-1}) a^{m-2p} + \dots$$

Il est facile de montrer que

$$2 \cos mx = 2 \cos x \cdot 2 \cos (m-1) x - 2 \cos (m-2) x,$$

ou, avec nos notations, $S_m = aS_{m-1} - S_{m-2}$.

Il est facile de vérifier que pour $m = 1$ et $m = 2$ l'égalité à démontrer est vraie. Admettons que

$$S_{m-1} = a^{m-1} - (m-1) a^{m-3} + (C_{m-3}^2 + C_{m-4}^1) a^{m-5} + \dots$$
$$\dots + (-1)^p (C_{m-p-1}^p + C_{m-p-2}^{p-1}) a^{m-2p-1} + \dots;$$
$$S_{m-2} = a^{m-2} - (m-2) a^{m-4} + (C_{m-4}^2 + C_{m-5}^1) a^{m-6} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{p-1} (C_{m-p-1}^{p-1} + C_{m-p-2}^{p-2}) a^{m-2p} + \dots$$

Alors

$$S_m = a^m - ma^{m-2} + \dots + (-1)^p (C_{m-p-1}^p + C_{m-p-2}^{p-1} +$$
$$+ C_{m-p-1}^{p-1} + C_{m-p-2}^{p-2}) a^{m-2p} + \dots$$

Prenant en considération que $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, nous obtenons le résultat demandé.

53. $$\frac{\sin mx}{\sin x} = (2 \cos x)^{m-1} - C_{m-2}^1 (2 \cos x)^{m-3} +$$
$$+ C_{m-3}^2 (2 \cos x)^{m-5} - \dots + (-1)^p C_{m-p-1}^p (2 \cos x)^{m-2p-1} + \dots$$

54. a) $2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$; b) $2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$.

56. $\frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin \frac{n\pi}{6}$.

59. a) Solution.

$$S = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi.$$

Formons

$$T = a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \ldots + a^k\sin k\varphi\,;$$

$$S + Ti = 1 + a(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots$$
$$\ldots + a^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Posant $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, nous obtenons

$$S + Ti = 1 + a\alpha + a^2\alpha^2 + \ldots + a^k\alpha^k = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1}.$$

S est égal à la partie réelle de la somme obtenue. Nous avons

$$S + Ti = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1} \cdot \frac{a\alpha^{-1} - 1}{a\alpha^{-1} - 1} = \frac{a^{k+2}\alpha^k - a^{k+1}\alpha^{k+1} - a\alpha^{-1} + 1}{a^2 - a(\alpha + \alpha^{-1}) + 1}.$$

D'où

$$S = \frac{a^{k+2}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}.$$

b) $\frac{a^{k+2}\sin(\varphi + kh) - a^{k+1}\sin[\varphi + (k+1)h] - a\sin(\varphi - h) + \sin\varphi}{a^2 - 2a\cos h + 1}$.

c) $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

60. Solution.

$$T = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx\,;$$
$$S = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx.$$

Soit $\alpha = \cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}$. Alors $S + Ti = \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n}$, $S + Ti =$

$$= \alpha^2\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \alpha^2\frac{\alpha^n(\alpha^n - \alpha^{-n})}{\alpha(\alpha - \alpha^{-1})} = \left(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

D'où

$$T = \sin\frac{n+1}{2}x\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

61. $\dfrac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}$.

64. a) $\dfrac{\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, si n est pair, $\dfrac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$,

si n est impair;

b) $\dfrac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, si n est pair, $\dfrac{\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$,

si n est impair.

66. a) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x$.

67. a) $2^n\sin^n\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi-(n+2)x}{2}$; b) $2^n\sin^n\frac{x}{2}\sin\frac{(n+2)x-n\pi}{2}$.

68. La limite de la somme est égale au vecteur qui représente le nombre $\dfrac{3+i}{5}$.

69. $\dfrac{n}{2}-\dfrac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$.

71. a) $\dfrac{3\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos\frac{3(n+1)}{2}x\sin\frac{3nx}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}}$;

b) $\dfrac{3\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin\frac{3(n+1)}{2}x\sin\frac{3nx}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}}$.

72. a) $\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$;

b) $\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$.

73. $e^a(\cos b+i\sin b)$.

75. a) -3; $\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$; b) -3; $\dfrac{3\pm 5i\sqrt{3}}{2}$;

c) -7; $-1\pm i\sqrt{3}$; d) -1; $\dfrac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}$;

e) 2; $-1\pm\sqrt{3}$; f) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})$;

g) $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$; $\frac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3})$;

h) $1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\frac{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})$;

i) $-(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$; $\frac{-2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})$;

j) 2; $-1\pm 2i\sqrt{3}$; k) 2; $-1\pm 3i\sqrt{3}$;

l) 2; $-1\pm 4i\sqrt{3}$; m) 1; $-2\pm\sqrt{3}$;

n) 4; $-1\pm 4i\sqrt{3}$; o) $-2i$; i; i;

p) $-1-i$; $-1-i$; $2+2i$;

q) $-(a+b)$; $\frac{a+b}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(a-b)$;

r) $-(a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2})$; $\frac{a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(a\sqrt[3]{f^2g}-b\sqrt[3]{fg^2})$;

s) 2,1149; —0,2541; —1,8608;

t) 1,5981; 0,5115; —2,1007.

76. Solution.

$$x_1-x_2=\alpha(1-\omega)+\beta(1-\omega^2)=(1-\omega)(\alpha-\beta\omega^2);$$
$$x_1-x_3=\alpha(1-\omega^2)+\beta(1-\omega)=(1-\omega^2)(\alpha-\beta\omega);$$
$$x_2-x_3=\alpha(\omega-\omega^2)+\beta(\omega^2-\omega)=(\omega-\omega^2)(\alpha-\beta);$$
$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=3(\omega-\omega^2)(\alpha^3-\beta^3);$$
$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27[(\alpha^3+\beta^3)^2-4\alpha^3\beta^3]=$$
$$=-27q^2-4p^3.$$

77. Solution.

L'équation du troisième degré, mentionnée dans l'indication, est $z^3-3(px+q)z+x^3+p^3-3qx-3pq=0$, elle admet comme racine évidente $z=-(x+p)$. Les autres racines de cette équation sont $z_{2,3}=\frac{x+p\pm\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}$. En vertu du problème n° 76, le premier membre de l'équation étudiée peut être représenté sous la forme

$$-\frac{1}{27}(z_2-z_3)^2(z_3-z_1)^2(z_1-z_2)^2=$$
$$=-\frac{1}{27}[-3(x-p)^2+12q]\left[\frac{3(x+p)+\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}\right]^2\times$$
$$\times\left[\frac{3(x+p)-\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}\right]^2=[(x-p)^2-4q](x^2+px+p^2-q)^2.$$

d'où il est facile de trouver les racines:

$$x_{1,2}=p\pm 2\sqrt{q};\quad x_3=x_4=\frac{-p+\sqrt{4q-3p^2}}{2};$$

$$x_5=x_6=\frac{-p-\sqrt{4q-3p^2}}{2}.$$

78. Le premier membre peut être mis sous la forme:

$$\alpha^5+\beta^5+5(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-a)(\alpha\beta-a)-2b=0.$$

Réponse. $x=\alpha+\beta$, où $\alpha=\sqrt[5]{b+\sqrt{b^2-a^5}}$; $\beta=\sqrt[5]{b-\sqrt{b^2-a^5}}$, $\alpha\beta=a$.

79. a) $\pm\sqrt{2}$; $1\pm i\sqrt{3}$; b) $-1\pm\sqrt{6}$; $\pm i\sqrt{3}$;

c) $\pm\sqrt{2}$; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;

e) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; $1\pm i$; f) $\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$; $\frac{5\pm i\sqrt{7}}{2}$;

g) $\pm i$; $1\pm i\sqrt{2}$; h) $\pm\sqrt{5}$; $\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$;

i) $\pm i$; $-1\pm i\sqrt{6}$; j) $-2\pm 2\sqrt{2}$; $-1\pm i$;

k) 1; 3; $1\pm\sqrt{2}$; l) 1; -1; $1\pm 2i$;

m) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}$;

n) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}$;

o) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1-2\sqrt{2}}$; $\frac{1-\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$;

p) $1+\sqrt{7}\pm\sqrt{6+2\sqrt{7}}$; $1-\sqrt{7}\pm\sqrt{6-2\sqrt{7}}$;

q) $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$; $\frac{1\pm\sqrt{-4\sqrt{3}-3}}{2}$;

r) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-2-6\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{-2+6\sqrt{5}}}{4}$;

s) $\frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{-5+2\sqrt{2}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{-5-2\sqrt{2}}}{4}$;

t) $\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4}$.

80. Solution.

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}+mx+n\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}-mx-n\right);$$

$$x_1x_2=\frac{\lambda}{2}+n;\quad x_3x_4=\frac{\lambda}{2}-n;\quad \lambda=x_1x_2+x_3x_4.$$

81. a) ± 1; b) 1; $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) ± 1; $\pm i$;

d) ± 1; $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$;

f) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

g) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;
$\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

82. a) -1; b) $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\pm i$; d) $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; f) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

g) $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

83. a) 20; 20; 180; b) 72; 144; 12.

84. $\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, où $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

85. a) Introduisant la notation $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{16} + i\sin\frac{2k\pi}{16}$, nous obtenons:
l'exposant 1 est celui de ε_0;
l'exposant 2 est celui de ε_8;
l'exposant 4 est celui de ε_4, ε_{12};
l'exposant 8 est celui de ε_2, ε_6, ε_{10}, ε_{14};
les racines primitives du 16$^{\text{ème}}$ ordre sont ε_1, ε_3, ε_5, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{15}.

b) Introduisant la notation $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{20} + i\sin\frac{2k\pi}{20}$, nous obtenons:
l'exposant 1 est celui de ε_0;
l'exposant 2 est celui de ε_{10};
l'exposant 4 est celui de ε_5, ε_{15};
l'exposant 5 est celui de ε_4, ε_8, ε_{12}, ε_{16};
l'exposant 10 est celui de ε_2, ε_6, ε_{14}, ε_{18};
les racines primitives du 20$^{\text{ème}}$ ordre sont ε_1, ε_3, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}.

c) Indroduisant la notation $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{24} + i\sin\frac{2k\pi}{24}$, nous obtenons:
l'exposant 1 est celui de ε_0;
l'exposant 2 est celui de ε_{12};
l'exposant 3 est celui de ε_8, ε_{16};
l'exposant 4 est celui de ε_6, ε_{18};
l'exposant 6 est celui de ε_4, ε_{20};
l'exposant 8 est celui de ε_3, ε_9, ε_{15}, ε_{21};
l'exposant 12 est celui de ε_2, ε_{10}, ε_{14}, ε_{22}; ε_1, ε_5, ε_7, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}, ε_{23} sont les racines primitives du 24$^{\text{ème}}$ ordre.

86. a) $X_1(x) = x - 1$; b) $X_2(x) = x + 1$;
c) $X_3(x) = x^2 + x + 1$; d) $X_4(x) = x^2 + 1$;
e) $X_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;

f) $X_6(x) = x^2 - x + 1$;
g) $X_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
h) $X_8(x) = x^4 + 1$;
i) $X_9(x) = x^6 + x^3 + 1$;
j) $X_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$;
k) $X_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
l) $X_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$;
m) $X_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$;
n) $X_{105}(x) = x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} -$
$- x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} -$
$- x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} +$
$+ x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1.$

87. $\dfrac{2}{1-\varepsilon}$.

88. 0 si $n > 1$.

89. n si k est divisible par n; 0 si k n'est pas divisible par n.

90. $m\,(x^m + 1)$.

91. $-\dfrac{n}{1-\varepsilon}$ si $\varepsilon \neq 1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$ si $\varepsilon = 1$.

92. $-\dfrac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$ si $\varepsilon \neq 1$; $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ si $\varepsilon = 1$.

93. a) $-\dfrac{n}{2}$; b) $-\dfrac{n}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{n}$.

94. a) 1; b) 0; c) -1.

95. $x_0 = 1$;

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

96. $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

97. S o l u t i o n. Divisons les deux membres de l'équation $x^6+x^5+x^4+$ $+x^3+x^2+x+1=0$ par x^3. Après une certaine transformation nous obtenons

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

$z = 2\cos\dfrac{4\pi}{7} = -2\sin\dfrac{\pi}{14}$ vérifie l'équation $z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$. D'où $t =$ $= 2\sin\dfrac{\pi}{14}$ vérifie l'équation $t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$. L'équation obtenue est la plus simple en ce sens que toute autre équation à coefficients rationnels ayant une racine commune avec celle-ci est d'ordre plus élevé. La démonstration exige des connaissances des parties suivantes du cours.

98. Solution. Soit $n=2m$. Dans ce cas l'équation $x^n-1=0$ possède deux racines réelles 1 et -1 et $2m-2$ racines complexes. $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2m}+$ $+i\sin\frac{2k\pi}{2m}$ est alors le conjugué de $\varepsilon_{2m-k}=\cos\frac{2(2m-k)\pi}{2m}+$ $+i\sin\frac{2(2m-k)\pi}{2m}$, et nous avons

$$x^{2m}-1=(x^2-1)(x-\varepsilon_1)(x-\bar\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\bar\varepsilon_2)\dots(x-\varepsilon_{m-1})(x-\bar\varepsilon_{m-1});$$

$$x^{2m}-1=(x^2-1)[x^2-(\varepsilon_1+\bar\varepsilon_1)x+1]\dots[x^2-(\varepsilon_{m-1}+\bar\varepsilon_{m-1})x+1];$$

$$x^{2m}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).$$

Si $n=2m+1$, nous obtenons de façon analogue

$$x^{2m+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+1\right).$$

99. Solution. a) Nous avons

$$\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).$$

Posant $x=1$, nous obtenons $m=2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{m}\right)$, ou

$$m=2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\frac{k\pi}{2m},$$

et, enfin,

$$\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}=\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{2m}.$$

La formule b) s'obtient de façon analogue.

100. Solution. Posons $x=-\frac{a}{b}$ dans l'identité

$$x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k),\ \text{où}\ \varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Nous obtenons

$$(-1)^n\frac{a^n}{b^n}-1=(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}+\varepsilon_k\right),\ \text{etc.}$$

101. Opérant comme il est indiqué dans la partie II, nous avons

$$\cos n\theta + i \sin n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\cos\theta + i \sin\theta - \varepsilon_k),$$

$$\cos n\theta - i \sin n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\cos\theta - i \sin\theta - \varepsilon_k).$$

Multipliant les dernières égalités, nous obtenons le résultat demandé.

102. Solution.

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t} = \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} (t+\varepsilon_k - \varepsilon_s) =$$

$$= \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} \left[t - \varepsilon_k \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k} - 1\right)\right] = \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} [t - \varepsilon_k (\varepsilon_s - 1)] =$$

$$= \frac{1}{t^n} \prod_{s=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} [t - \varepsilon_k (\varepsilon_s - 1)] = \frac{1}{t^n} \prod_{s=0}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_s - 1)^n] = \prod_{k=1}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_k - 1)^n].$$

103. Nous avons $|x| = |x|^{n-1}$, par conséquent $|x| = 0$ ou $|x| = 1$. Si $|x| = 0$, on a $x = 0$. Si $|x| = 1$, on a $x\bar{x} = 1$. D'autre part, $x\bar{x} = x^n$. Par conséquent, $x^n = 1$. Ainsi

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

L'inverse est facile à vérifier.

104. Solution. Si z vérifie l'équation donnée, on a $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}$. Le lieu géométrique des points, dont les distances de deux points donnés forment le rapport donné, est une circonférence (dans un cas particulier une droite).

105. a) Nous avons $\frac{x+1}{x-1} = \varepsilon_k$, où $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Il en découle que $x = \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1}$. La transformation de la dernière expression donne

$$x_k = i \operatorname{cotg}\frac{k\pi}{m}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1;$$

b) $x_k = \operatorname{cotg}\frac{k\pi}{m}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1;$

c) $x_k = \frac{a}{\varepsilon_k \sqrt[n]{2} - 1},$

où $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

106. Solution. Soit $A=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Alors $\frac{1+ix}{1-ix}=\eta_k^2$, où $\eta_k=$ $=\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2m}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2m}$, $k=0, 1, \ldots, m-1$. Il en découle que

$$x=\frac{\eta_k^2-1}{i(\eta_k^2+1)}=\frac{\eta_k-\eta_k^{-1}}{i(\eta_k+\eta_k^{-1})}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+2k\pi}{2m}.$$

107. Solution. Opérant comme il est indiqué dans la partie II, nous avons :

$$S+Ti=\mu(1+\lambda x)^n,\quad S-Ti=\bar{\mu}(1+\bar{\lambda}x)^n,$$

où $\lambda=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\mu=\cos\varphi+i\sin\varphi$. D'où

$$2S=\mu(1+\lambda x)^n+\bar{\mu}(1+\bar{\lambda}x)^n.$$

L'équation prend la forme $\mu(1+\lambda x)^n+\bar{\mu}(1+\bar{\lambda}x)^n=0$;

$$x_k=-\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi-2n\alpha}{2n}};\quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

108. Solution. Soit $\alpha^a=1$; $\beta^b=1$. Alors $(\alpha\beta)^{ab}=(\alpha^a)^b\cdot(\beta^b)^a=1$.

109. Solution. Soit ε la racine commune de x^a-1 et x^b-1, s est l'exposant associé à ε. Dans ce cas s est un diviseur commun de a et b, aussi s ne peut être égal qu'à 1 et $\varepsilon=1$. L'inverse est évident.

110. Solution. Soient α_k et β_s des racines d'ordre a et b de l'unité. $k=0, 1, 2, \ldots, a-1$; $s=0, 1, 2, \ldots, b-1$. En vertu du problème n° 108, il suffit de démontrer que tous les $\alpha_h\beta_s$ sont différents. Admettons que $\alpha_{k_1}\beta_{s_1}=$ $=\alpha_{k_2}\beta_{s_2}$, alors $\frac{\alpha_{k_1}}{\alpha_{k_2}}=\frac{\beta_{s_2}}{\beta_{s_1}}$, autrement dit $\alpha_i=\beta_j$. Du problème n° 109 il découle que $\alpha_i=\beta_j=1$, c'est-à-dire que $k_1=k_2$; $s_1=s_2$.

111. Solution. Soient α et β des racines primitives d'ordre a et b de l'unité. Soit $(\alpha\beta)^s=1$. Dans ce cas $\alpha^{bs}=1$; $\beta^{as}=1$. Il s'ensuit que bs est divisible par a, as par b. Par conséquent, s est divisible par ab.

Soit λ une racine primitive d'ordre ab de l'unité. Alors $\lambda=\alpha^k\beta^s$ (problème n° 110). Soit α^k l'exposant associé à $a_1<a$. Alors $\lambda^{a_1b}=(\alpha^k)^{a_1b}(\beta^s)^{a_1b}=$ $=1$, ce qui est impossible. De façon analogue on peut montrer que β^s est une racine primitive d'ordre b de l'unité.

112. Découle directement du problème n° 111.

113. En suivant l'indication (partie II) relevons tous les nombres multiples de p et non supérieurs à p^α. Plus précisément : $1\cdot p$, $2\cdot p$, $3\cdot p$, $\ldots$, $p^{\alpha-1}\cdot p$. Il est facile de voir qu'il en existe $p^{\alpha-1}$. D'où $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}=$ $=p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$. D'après le problème n° 112 nous avons

$$\varphi(n)=\varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2})\ldots\varphi(p_k^{\alpha_k})=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

114. Solution. Si ε est une racine primitive d'ordre n de l'unité, alors $\bar{\varepsilon}$ conjugué de ε est aussi une racine primitive d'ordre n de l'unité. Par ailleurs $\varepsilon\neq\pm1$, car $n>2$.

115. $X_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$.

116. $X_{p^m}(x)=x^{(p-1)p^{m-1}}+x^{(p-2)p^{m-1}}+\ldots+x^{p^{m-1}}+1$.

117. L'indication peut être réalisée immédiatement en vertu du problème nº 111.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varphi(n)}$ les racines primitives d'ordre n de l'unité. Dans ce cas $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{\varphi(n)}$ sont les racines primitives d'ordre $2n$ de l'unité. Nous avons

$$X_{2n}(x) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{\varphi(n)}) =$$
$$= (-1)^{\varphi(n)}(-x-\alpha_1)\ldots(-x-\alpha_{\varphi(n)}),$$

ou (problème nº 114) $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

118. Solution. Soit $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{nd} + i\sin\frac{2k\pi}{nd}$ une racine primitive d'ordre nd de l'unité, ce qui signifie que k et n sont premiers entre eux. Divisant k par n, nous obtenons $k = nq + r$, où $0 < r < n$. D'où $\varepsilon_k =$
$= \cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d}$, c'est-à-dire que ε_k est l'une des valeurs de la racine d'ordre d de $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$; η_r est une racine primitive d'ordre n de l'unité, car chaque diviseur commun de r et n est un diviseur commun de k et n.

Soit maintenant $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$ une racine primitive d'ordre n de l'unité, c'est-à-dire que r et n sont premiers entre eux.

Formons $\varepsilon_q = \cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} = \cos\frac{2\pi(r+nq)}{nd} +$
$+ i\sin\frac{2\pi(r+nq)}{nd}$, où $q = 0, 1, 2, \ldots, d-1$. ε_q est une racine primitive d'ordre nd de l'unité. En effet, si $r + nq$ et nd étaient tous les deux divisibles par un certain p premier, n et r seraient aussi divisibles par p, ce qui est impossible.

119. Solution. Supposons que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n')}$ sont les racines primitives d'ordre n' de l'unité. Alors $X_{n'}(x^{n''}) = \prod_{k=1}^{\varphi(n')}(x^{n''} - \varepsilon_k)$. Soit ensuite $(x - \varepsilon_{k,1})(x - \varepsilon_{k,2})\ldots(x - \varepsilon_{k,n''})$ la décomposition de $x^{n''} - \varepsilon_k$ en facteurs linéaires. Alors $X'_n(x^{n''}) = \prod_{\substack{k=1\\ i=1}}^{\substack{k=\varphi(n')\\ i=n''}}(x - \varepsilon_{k,i})$. En vertu du problème nº 118 chaque facteur linéaire $x - \varepsilon_{k,i}$ entre dans le développement de $X_n(x)$ et inversement. Comme, en outre, $\varphi(n) = n''\varphi(n')$, les degrés de $X_n(x)$ et $X_{n'}(x^{n''})$ sont égaux.

121. Solution. La somme de toutes les racines d'ordre n de l'unité est égale à 0. Chaque racine d'ordre n de l'unité étant associée à l'exposant d, diviseur de n, et inversement, on a $\sum_{d/n}\mu(d) = 0$.

122. Solution. Supposons que $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ soit associée à l'exposant n_1. Dans ce cas le facteur $x - \varepsilon_k$ entrera dans de tels et seulement dans de tels binômes $x^d - 1$ pour lesquels d est divisible par n_1. Par ailleurs, si d parcourt tous les diviseurs de n qui sont multiples de n_1, $\frac{n}{d}$ parcourt tous les diviseurs de $\frac{n}{n_1}$ Donc $x - \varepsilon_k$ entrera dans le deuxième membre avec l'exposant $\sum\limits_{d/\frac{n}{n_1}} \mu(d_1)$. Cette somme est égale à 0 si $\frac{n}{n_1} \neq 1$ et à 1 si $n = n_1$.

123. S o l u t i o n. Si $n = p^\alpha$, où p est premier, alors $X_n(1) = p$. Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts (problème n° 119), alors $X_n(1) = X_{n'}(1)$, où $n' = p_1 p_2 \ldots p_k$.

Soit maintenant $n = p_1 p_2 \ldots p_k$; $k \geqslant 2$; $n_1 = \frac{n}{p_k}$. Remarquons que pour obtenir tous les diviseurs de n, il suffit d'ajouter à tous les diviseurs de n_1 leurs produits par p_k. C'est pourquoi

$$X_n(x) = \prod_{d/n} (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} = \prod_{d/n_1} (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \cdot \prod_{d/n_1} (x^{dp_k} - 1)^{\mu\left(\frac{n}{dp_k}\right)} =$$

$$= [X_{n_1}(x)]^{-1} \cdot X_{n_1}(x^{p_k}).$$

D'où $X_n(1) = 1$.

124. S o l u t i o n. 1) Soit n un nombre impair supérieur à l'unité. Alors (problème n° 117) $X_n(-1) = X_{2n}(1) = 1$.

2) Soit $n = 2^k$, alors $X_n = \dfrac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{2}} - 1} = x^{\frac{n}{2}} + 1$ et $X_n(-1)$ est égal à 0 si $k = 1$ et à 2 si $k > 1$.

3) Soit $n = 2n_1$, où n_1 est un nombre impair, supérieur à l'unité. Alors (problème n° 117) $X_n(-1) = X_{n_1}(1)$ et, par conséquent, $X_n(-1)$ est égal à p si $n_1 = p^\alpha$ (p est premier) ou à 1 si $n_1 \neq p^\alpha$.

4) Soit $n = 2^k n_1$, où $k > 1$, et $n_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_s$ sont différents nombres premiers impairs). Dans ce cas (problème n° 119) $X_n(x) = X_{2p_1p_2\ldots p_s}(x^\lambda)$, où $\lambda = 2^{k-1} p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_s^{\alpha_s - 1}$. Il en découle que $X_n(-1) = X_n(1) = 1$.

125. S o l u t i o n. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ les racines primitives d'ordre n de l'unité :

$$s = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)-1} \cdot \varepsilon_{\varphi(n)} = \frac{[\mu(n)]^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2)}{2}.$$

1) Supposons que n est impair, alors ε_i^2 est une racine primitive d'ordre n de l'unité et $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_j^2$ seulement pour $i = j$. C'est pourquoi

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = \mu(n) \quad \text{et} \quad s = \frac{[\mu(n)]^2 - \mu(n)}{2}.$$

2) Supposons que $n = 2n_1$; n_1 est impair. Dans ce cas $-\varepsilon_i$ (problème n° 111) est une racine primitive d'ordre n_1 de l'unité et c'est pourquoi (cf. 1)) $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{\varphi(n)}^2 = \mu(n_1) = -\mu(n)$. Ainsi, dans ce cas $s = \dfrac{[\mu(n)]^2 + \mu(n)}{2}$

3) Supposons $n=2^k n_1$, où $k>1$, n_1 est impair. Dans ce cas ε_i^2 appartient à l'exposant $\frac{n}{2}$. En vertu du problème nº 118 nous affirmons que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ représentent les racines carrées de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$, où $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$ sont les racines primitives d'ordre $\frac{n}{2}$ de l'unité. Il en découle que

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2=2\left(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}\right)=2\mu\left(\frac{n}{2}\right); \quad s=-\mu\left(\frac{n}{2}\right).$$

126. Solution. $S=\sum_{x=0}^{n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum_{x=y}^{y+n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}$ pour tout y entier:

$$S'=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2}; \; S'S=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2}S=\sum_{y=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{-y^2}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}\right)=$$

$$=\sum_{y=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys+s^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys}\right)=n+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}(\varepsilon^{2s})^y=n$$

pour n impair;

$$SS'=n+n\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]$$

pour n pair $\left(\text{puisque } \sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2sy}=0 \text{ si } 2s \text{ n'est pas divisible par } n\right)$.

Ainsi $|S|=\sqrt{n}$ si n est impair et $|S|=\sqrt{n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]}$ si n est pair.

Chapitre 2

CALCUL DES DÉTERMINANTS

127. a) 5 ; b) 5 ; c) 1 ; d) $ab-c^2-d^2$; e) $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$;
f) $\sin(\alpha-\beta)$; g) $\cos(\alpha+\beta)$; h) $\sec^2\alpha$; i) -2 ;
j) 0 ; k) $(b-c)(d-a)$; l) $4ab$; m) -1 ;
n) -1 ; o) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

128. a) 1 ; b) 2 ; c) $2a^2(a+x)$; d) 1 ; e) -2 ;
f) $-2-\sqrt{2}$; g) $-3i\sqrt{3}$; h) -3.

129. Le nombre de transpositions est impair.

130. a) 10 ; b) 18 ; c) 36. **131.** a) $i=8$; $k=3$; b) $i=3$; $k=6$.

132. C_n^2. **133.** C_n^2-I. **134.** a) $\frac{n(n-1)}{2}$; b) $\frac{n(n+1)}{2}$.

135. a) $\frac{n(3n+1)}{2}$; b) $\frac{3n(n-1)}{2}$.

136. Considérons le couple d'éléments a_i et a_k, où $i<k$. Si ces éléments ne forment pas d'inversions, alors, après avoir ramené la permutation à l'ordre initial, a_i précédera a_k et, par conséquent, les numéros i et k ne formeront pas d'inversions.

Si au contraire les éléments a_i et a_k forment une inversion, alors, après avoir ramené la permutation à l'ordre initial, a_k précédera a_i, et, par conséquent, les numéros i et k formeront une inversion.

137. La substitution est impaire dans les deux cas. Ceci s'explique par le fait qu'une permutation initiale s'obtient d'une autre à l'aide d'un nombre pair de transpositions.

138. a) avec le signe + ; b) avec le signe + .

139. a) n'entre pas ; b) entre.

140. $i=1$; $k=4$.

141. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ et $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

142. $-a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$.

143. Avec le signe + . **144.** Avec le signe $(-1)^{C_n^2}$.

146. 2 ; -1. **147.** a) $n!$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; c) $n!$.

148. a) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n!)^{n+1}$; b) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n!)^{n+1}$.

149. Solution. En inversant les lignes et les colonnes le déterminant 1) n'est pas modifié, 2) se transforme en nombre complexe conjugué.

150. Solution. En inversant les lignes et les colonnes la valeur du déterminant 1) n'est pas modifiée, 2) est multipliée par -1.

151. $(-1)^{n-1}\Delta$. 152. Est multiplié par $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

153. 0, car le nombre des permutations paires de n éléments est égal au nombre des permutations impaires.

154. a) $x_1=a_1$; $x_2=a_2$; ...; $x_{n-1}=a_{n-1}$;

b) $x_1=0$; $x_2=1$; ...; $x_{n-1}=n-2$;

c) $x_1=a_1$; $x_2=a_2$; ...; $x_{n-1}=a_{n-1}$.

156. 0. 158. $(mq-np)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

159. a) $a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$;

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

160. $3a-b+2c+d$. 161. $4t-x-y-z$. 162. $2a-b-c-d$.

163. $-1\,487\,600$. 164. $-29\,400\,000$. 165. 48. 166. 1.

167. 160. 168. 12. 169. 900. 170. 394. 171. 665.

172. $a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)$. 173. $-2(x^3+y^3)$.

174. $(x+1)(x^2-x+1)^2$. 175. x^2z^2.

176. $-3(x^2-1)(x^2-4)$. 177. $\sin(c-a)\sin(c-b)\sin(a-b)$.

178. $(af-be+cd)^2$. 179. $n!$. 180. $b_1b_2\ldots b_n$.

181. $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

182. $(n-1)!$. 183. $-2(n-2)!$. 184. 1.

185. $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$. 186. $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$.

187. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n]$.

188. $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. 189. $\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}$.

190. $(n+1)!\,x^n$. 191. $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

192. $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$. 193. $\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$.

194. $(-1)^n(n+1)a_1a_2\ldots a_n$.

195. $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

196. $h(x+h)^n$. 197. $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

198. $(-1)^n2^{n-1}a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

199. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. 200. $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

201. $\prod_{k=1}^{n}(1-ax_{k,k})$. 202. $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$.

203. $(-1)^n(a_0b_0+a_1b_1+\ldots+a_nb_n)\,b_1b_2\ldots b_{n-1}$.

204. $a(a+b)(a+2b)\ldots[a+(n+1)b]$.

205. $x^n+(-1)^{n-1}y^n$. 206. 0 si $n>2$.

207. 0 si $n>2$.

208. Soit $n=2$. En suivant l'indication (partie II) nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_1+x_2 \\ 0 & a_2+x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+x_1 & 0 \\ a_2+x_1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1+x_2 \\ a_2+x_1 & a_2+x_2 \end{vmatrix} = 1+[(a_1+x_1)+(a_2+x_2)]+(a_2-a_1)(x_1-x_2).$$

Représentant de la même façon le déterminant d'ordre n sous la forme d'une somme de 2^n déterminants nous voyons que l'un des termes est égal à l'unité, n termes sont égaux à a_i+x_i, où $i=1, 2, \ldots, n$, et $\frac{n(n-1)}{2}$ termes sont égaux à $(a_i-a_k)(x_k-x_i)$, où $i>k$.

Les termes restants sont nuls. Donc nous avons comme réponse:

$$1+\sum_{i=1}^{n}(a_i+x_i)+\sum_{i>k}(a_i-a_k)(x_k-x_i).$$

On peut transformer ce résultat en le présentant sous la forme

$$(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)-n(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

209. 0 si $p>2$. 211. $\frac{n+1}{1-x}+\frac{x^{n+1}-1}{(1-x)^2}$.

212. Solution. Il est facile de voir que

$$\Delta_2=x_1x_2\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}\right).$$

Supposons que

$$\Delta_{n-1}=x_1x_2\ldots x_{n-1}\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right).$$

Alors

$$\Delta_n=x_1x_2\ldots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right)+$$

$$+a_nx_1x_2\ldots x_{n-1}=x_1x_2\ldots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n}{x_n}\right).$$

213. $a_0x_1x_2\ldots x_n+a_1y_1x_2\ldots x_n+a_2y_1y_2x_3\ldots x_n+\ldots+a_ny_1y_2\ldots y_n$.

214. $-a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

215. $n!\,(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)$.

216. $a_1a_2\ldots a_{n-1}-a_1a_2\ldots a_{n-2}+\ldots+(-1)^n a_1+(-1)^{n+1}$.

217. Solution. Développons le déterminant suivant les éléments de la première colonne; nous obtenons $\Delta_n=(\alpha+\beta)\Delta_{n-1}-\alpha\beta\Delta_{n-2}$. Il est facile de

vérifier que $\Delta_2=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$; $\Delta_3=\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}$. Supposons que $\Delta_{n-2}=\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$; $\Delta_{n-1}=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$. Alors

$$\Delta_n=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

Seconde variante de la solution.

Représentons Δ_n sous forme de somme $d_n+\delta_n$, où

$$d_n=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

$$\delta_n=\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Dans la première ligne mettons α en facteur commun et retranchons ensuite de la deuxième ligne la première. Nous obtenons $d_n=\alpha d_{n-1}$. Il est facile de voir que $d_2=\alpha^2$. Soit $d_{n-1}=\alpha^{n-1}$, alors $d_n=\alpha^n$.

Développant δ_n suivant les éléments de la première ligne, nous voyons que

$$\delta_n=\beta\Delta_{n-1}.$$

Il découle de ce que nous venons de dire que $\Delta_n=\alpha^n+\beta\Delta_{n-1}$. Il est facile de vérifier que $\Delta_2=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$. Supposons que $\Delta_{n-1}=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$. Alors

$$\Delta_n=\alpha^n+\beta\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

218. $n+1$. 219. $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. 220. $\cos n\theta$.

221. $x^n-C_{n-1}^1x^{n-2}+C_{n-2}^2x^{n-4}-\dots$ Comparer avec le problème nº 53.

222. $x_1y_n\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})$.

223. $a_1a_2\dots a_n\left(1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dots+\dfrac{1}{a_n}\right)$.

224. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\dots a_n\left(1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dots+\dfrac{1}{a_n}\right)$.

225. $x(a_1-x)\dots(a_n-x)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a_1-x}+\dots+\dfrac{1}{a_n-x}\right)$.

226. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\dots(x_n-a_n)\left(1+\dfrac{a_1}{x_1-a_1}+\dots+\dfrac{a_n}{x_n-a_n}\right)$.

227. $\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i)\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_ib_i}{x_i-a_ib_i}\right)$.

228. $(-1)^n m^n \left(1-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{m}\right).$

229. $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0;\quad x_n=\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\alpha_i}.$

230. $(a^2-b^2)^n.$

231. $a(a+b)\ldots[a+(n-1)b]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\ldots+\frac{1}{a+(n-1)b}\right).$

232. $x^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right).$

233. $x^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right).$

234. $1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\ldots+(-1)^n b_1b_2\ldots b_n.$

235. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\ldots a_n+b_1b_2a_3\ldots a_n+\ldots+b_1b_2\ldots b_{n-1}a_n).$

236. $(-1)^{n-1}x^{n-2}.$ 237. $(-1)^n[(x-1)^n-x^n].$

238. $a_0x^n\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$ 240. 1. 241. 1. 242. 1.

243. $\frac{C_{m+n}^{n+1}C_{m+n-1}^{n+1}\ldots C_{m+n-k+1}^{n+1}}{C_{k+n}^{n+1}C_{k+n-1}^{n+1}\ldots C_{n+1}^{n+1}}.$ 244. $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$

245. $(x-1)^n.$ 246. $(n-1)!\,(n-2)!\ldots 1!\,(x-1)^n.$

247. $\alpha^n.$

248. En suivant l'indication (partie II), nous obtenons :

$$\Delta_n=(x-z)\,\Delta_{n-1}+z\,(x-y)^{n-1},$$
$$\Delta_n=(x-y)\,\Delta_{n-1}+y\,(x-z)^{n-1}.$$

Du système d'équations obtenu nous trouvons :

$$\Delta_n=\frac{z\,(x-y)^n-y\,(x-z)^n}{z-y}.$$

249. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{ab\,(b^{n-1}-a^{n-1})}{a-b}.$

250. $\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y}$, où $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(a_k-x).$

251. $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, où $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(c_k-x).$

252. $(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].$

253. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

254. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (nh)^{n-1} \left[a+\frac{h(n-1)}{2}\right]$.

255. $(1-x^n)^{n-1}$.

256. Si on ajoute toutes les colonnes à la première, on peut mettre en facteur $a+b+c+d$ du déterminant et alors tous les éléments du déterminant restant sont des expressions entières par rapport à a.

Ceci démontre que le déterminant est divisible par $a+b+c+d$. Si à la première colonne on ajoute la deuxième, puis on en retranche la troisième et la quatrième, il apparaît que le déterminant est divisible par $a+b-c-d$. Raisonnant ainsi, nous montrerons que le déterminant est divisible par $a-b+c-d$ et $a-b-c+d$. Il découle de ce qui vient d'être dit que le déterminant est égal à $\lambda (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d) \times \times (a-b-c+d)$. Pour déterminer λ remarquons que le coefficient de a^4 doit être égal à 1, c'est pourquoi $\lambda = 1$.

257. $(a+b+c+d+e+f+g+h)(a+b+c+d-e-f-$
$-g-h)(a+b-c-d+e+f-g-h)(a+b-c-d-e-f+$
$+g+h)(a-b+c-d+e-f+g-h)(a-b+c-d-e+$
$+f-g+h)(a-b-c+d+e-f-g+h)(a-b-c+d-e+$
$+f+g-h)$.

258. $(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

259. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$.

260. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

261. $1!\,2!\ldots n!$. 262. $\prod\limits_{n+1\geqslant k>i\geqslant 1} (a_i-a_k)$.

263. $(-1)^n\, 1!\,2!\ldots n!$.

264. $(-1)^{n-1} \prod\limits_{i=1}^{n} a_i \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (a_i-a_k) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{w_i}{a_i f'(a_i)}\right)$,

où $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

265. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$.

266. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

267. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$.

268. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{01}a_{02}\dots a_{0,\,n-1} \prod_{n\geq i>k\geq 1} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n\geq i>k\geq 1} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}.$

269. $\frac{1}{1!\,2!\dots(n-1)!} \prod_{n\geq i>k\geq 1} (x_i-x_k).$

271. $1!\,3!\,5!\dots(2n-1)!.$ 272. $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1} \prod_{n\geq i>k\geq 1} (x_i-x_k).$

273. $\prod_{n+1\geq k>i\geq 1} (b_k a_i - a_k b_i).$ 274. $\prod_{1\leq i<k\leq n} \sin(\alpha_i-\alpha_k).$

275. $\prod_{1\leq i<k\leq n+1} (a_i-a_k)(a_i a_k-1).$

276. $2^{(n-1)^2} \prod_{n-1\geq i>k\geq 0} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n-1\geq i>k\geq 0} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}.$

277. $2^{n(n+1)} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \dots \sin\alpha_n \prod_{n\geq i>k\geq 0} \sin\frac{\alpha_i+\alpha_k}{2}\times$

$\times \prod_{n\geq i>k\geq 0} \sin\frac{\alpha_i-\alpha_k}{2}.$

278. $[x_1x_2\dots x_n-(x_1-1)\dots(x_n-1)]\cdot \prod_{n\geq i>k\geq 1} (x_i-x_k).$

279. $x_1x_2\dots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) \prod_{n\geq i>k\geq 1} (x_i-x_k).$

280. $(x_1+x_2+\dots+x_n) \prod_{n\geq i>k\geq 1} (x_i-x_k).$

281. $\sigma_{n-s} \prod_{n\geq i>k\geq 1} (x_i-x_k)$, où σ_p désigne la somme de tous les produits possibles des nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ pris p à p.

282. $[2x_1x_2\dots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)] \prod_{n\geq i>k\geq 1} (x_i-x_k).$

283. $x^2(x^2-1)^4.$ 284. $2x^3y(x-y)^6.$

285. $1!\,2!\,3!\dots(n-1)!\,x^{\frac{n(n-1)}{2}}(y-x)^n.$

286. $1!\,2!\,3!\dots(k-1)!\,x^{\frac{k(k-1)}{2}}(y_1-x)^k(y_2-x)^k\dots$
$\dots(y_{n-k}-x)^k \prod_{n-k\geq i>j\geq 1} (y_i-y_j).$

287. $(y-x)^{k(n-k)}.$

288. b) 9; c) 5; e) 128; f) $(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$;
g) $(x_3-x_2)^2(x_3-x_1)^2(x_2-x_1)^2$;
h) $(\lambda^2-a^2)(\alpha-\beta)^{n-1}[\alpha+(n-1)\beta]$;

k) $(x_4-x_3)\,[(x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)]$;

m) $27(a+2)^3(a-1)^6[3(a+2)^2-4x^2][3(a-1)^2-4x^2]^2$.

R e m a r q u e. Ce problème est un cas particulier du problème nº 537.

289. a) $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 17 \\ 11 & -6 & 5 \\ 3 & 8 & -3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -3 & 3 \\ -4 & -4 & -5 & 4 \\ -4 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

290. a) 24; b) 18;

c) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

291. a) 256; b) 78 400; c) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$.

292. $D\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

293. a) $C_n^1C_n^2\ldots C_n^n\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 0}(a_i-a_k)(b_k-b_i)$;

b) $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_k)(\beta_i-\beta_k)$.

294. 0 si $n\geqslant 2$. 295. $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

296. $-(a^2+b^2+c^2+d^2+l^2+m^2+n^2+p^2)^4$.

297. $4\sin^4\varphi$. 298. $4\sin^4\varphi$.

299. Désignons le déterminant recherché par Δ. Son élévation au carré montre que $|\Delta|=n^{\frac{n}{2}}$. D'autre part, $\Delta=\prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}(\varepsilon^k-\varepsilon^s)$.

Posons $\varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$. Alors $\varepsilon=\varepsilon_1^2$ et

$$\Delta=\prod_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}(\varepsilon^k-\varepsilon^s)=\prod\varepsilon_1^{k+s}\prod(\varepsilon_1^{k-s}-\varepsilon_1^{-k+s})=$$

$=\prod\varepsilon_1^{k+s}\cdot i^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}$. Ensuite, $\sin\frac{(k-s)\pi}{n}>0$ pour tous les k, s. Par conséquent, $n^{\frac{n}{2}}=|\Delta|=\left|\prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}\right|=\prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}$. C'est pourquoi $\Delta=n^{\frac{n}{2}}i^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}\varepsilon_1^{k+s}=n^{\frac{n}{2}}i^{\frac{n(n-1)}{2}}\varepsilon_1^{\frac{n(n-1)^2}{2}}=n^{\frac{n}{2}}i^{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)^2}=$

$=n^{\frac{n}{2}}i^{-\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$.

300. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a_0+a_1\varepsilon_k+a_2\varepsilon_k^2+\ldots+a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1})$, où $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

301. $x^4-y^4+z^4-u^4+4xy^2z+4xzu^2-4x^2yu-4yz^2u-2x^2z^2+2y^2u^2$.

303. 2^{n-1} si n est impair, 0 si n est pair.

304. $(-1)^n \dfrac{[(n+1)\,a^n-1]^n-n^n a^{n(n+1)}}{(1-a^n)^2}$.

305. $(-1)^{n-1}(n-1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1})$, où $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+$ $+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$.

306. $\varphi_0(t)\,\varphi_1(t)\ldots\varphi_{n-1}(t)$, où $\varphi_k(t)=\dfrac{(t+\varepsilon_k)^n-1}{t}$; $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+$ $+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$.

D'après le résultat du problème nº 102, la réponse peut être présentée sous la forme

$$\prod_{k=1}^{n-1}[t^n-(\varepsilon_k-1)^n].$$

307. $(-2)^{n-1}(n-2p)$ si $(n,\ p)=1$; 0 si $(n,\ p)\neq 1$.

308. $2^{n-2}\left(\cos^n\dfrac{\pi}{n}-1\right)$.

309. $2^{n-2}\sin^{n-2}\dfrac{n\theta}{2}\left[\sin^n\dfrac{(n+2)\,\theta}{2}-\sin^n\dfrac{n\theta}{2}\right]$.

310. $(-1)^n 2^{n-2}\sin^{n-2}\dfrac{nh}{2}\left[\cos^n\left(a+\dfrac{nh}{2}\right)-\cos^n\left(a+\dfrac{(n-2)\,h}{2}\right)\right]$.

311. $(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{12}n^{n-2}[(n+2)^n-n^n]$.

313. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1})$,

où $\varepsilon_k=\cos\dfrac{(2k+1)\,\pi}{n}+i\sin\dfrac{(2k+1)\,\pi}{n}$.

315. $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_1+a_2\rho_i+a_3\rho_i^2+\ldots+a_n\rho_i^{n-1})$,

où $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n$ sont les racines d'ordre n de μ.

318. Solution du problème nº 223. Ajoutant 1 à tous les éléments du déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & a_n\end{vmatrix}$, nous obtenons le déterminant Δ.

Nous avons

$$\Delta=a_1a_2\ldots a_n+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}=a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Solution du problème nº 250. Désignons le déterminant à calculer par Δ. Nous avons :

$$\Delta=(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)+x\sum A_{ik};$$
$$\Delta=(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_n-y)+y\sum A_{ik},$$

où $\sum A_{ik}$ est la somme des cofacteurs de tous les éléments de Δ. Il est facile de déterminer Δ du système d'équations.

323. $\prod\limits_{1\le i<k\le n}(a_i-a_k)\prod\limits_{1\le i<k\le n}(b_i-b_k)\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} f(a_i)}$,

où $f(x)=(x+b_1)\ldots(x+b_n)$.

325. $\dfrac{[c+\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}-[c-\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{c^2-4ab}}$.

326. $\dfrac{[p+\sqrt{p^2-4q}]^n+[p-\sqrt{p^2-4q}]^n}{2^n}$.

327. $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$, où a_k est la somme de tous les mineurs d'ordre k du déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, qui s'obtiennent de celui-ci en éliminant les $(n-k)$ lignes d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots \alpha_{n-k}$ et les colonnes de mêmes indices.

328. $(n+1)^{n-1}$. 329. $(x-n)^{n+1}$.

330. $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\ldots[x^2-(2m-1)^2]$ si $n=2m$;

$x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\ldots(x^2-4m^2)$ si $n=2m+1$.

331. $(x+na-n)[x+(n-2)a-n+1][x+(n-4)a-n+$ $+2]\ldots(x-na)$.

332. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$. 333. $\dfrac{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\cdots(2n-1)!}$.

334. $\dfrac{\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,\Delta(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{\Delta(1, 2, \ldots, n)}$, où Δ désigne le déterminant de Vandermonde.

Chapitre 3

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

335. $x_1 = 3; \quad x_2 = x_3 = 1.$

336. $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -\,-.$

337. $x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 3.$

338. $x_1 = 3, \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 5.$

339. $x_1 = x_2 = -1; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 1.$

340. $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -1; \quad x_4 = -2.$

341. $x_1 = -2; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -3; \quad x_4 = 3.$

342. $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1.$

343. $x_1 = 2; \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0.$

344. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$

345. $x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 2.$

346. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$

347. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$

348. $x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1; \quad x_5 = 1.$

349. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$

350. $x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1; \quad x_5 = 1.$

351. $x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 3.$

352. $x_1 = 2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = -2; \quad x_4 = -2; \quad x_5 = 1.$

353. Le système ayant une solution non triviale, son déterminant est égal à 0.

354. Le déterminant du système est égal à $-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

355. $$x_i = \frac{a \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - a_i\,[(n-1)\,\alpha + \beta]}{(\alpha - \beta)\,[(n-1)\,\alpha + \beta]}.$$

356. $$x_i = -\frac{f(\beta_i)}{\varphi'(\beta_i)}, \quad \text{où} \quad \begin{aligned} f(x) &= (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n), \\ \varphi(x) &= (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n). \end{aligned}$$

357. $$x_i = \frac{f(t)}{(t-\alpha_i)\,f'(\alpha_i)}, \quad \text{où} \quad f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n).$$

358. $$x_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+s} u_i}{f'(\alpha_i)}\,\varphi_{s,\,i}, \ \text{où}\ f(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n);$$

$\varphi_{s,\,i} = \sum \alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\dots\alpha_{t_{n-s}}$, la sommation est étendue à toutes les combinaisons $t_1, t_2, \dots, t_{n-s}$ des $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

359. $x_s=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n+1}u_i}{f'(\alpha_s)}\varphi_{i,s}$, où $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$;

$\varphi_{i,s}=\sum\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\ldots\alpha_{t_{n-i}}$; la sommation est étendue à toutes les combinaisons $t_1, t_2, \ldots, t_{n-i}$ des $1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$.

360. $x_i=\frac{(-1)^n a_{n-i}}{n!}$, où $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$.

361. $C_m^k \cdot C_n^k$.

365. a) Ne sera pas modifié ou augmentera de 1.
b) Ne sera pas modifié ou augmentera de 1 ou de 2.

366. 2. 367. 3. 368. 2. 369. 2. 370. 3.
371. 3. 372. 4. 373. 3. 374. 2. 375. 3.
376. 5. 377. 6. 378. 5. 379. 3. 380. 4.

383. Les formes sont indépendantes.

384. $2y_1-y_2-y_3=0$. 385. $y_1+3y_2-y_3=0$; $2y_1-y_2-y_4=0$.

386. Les formes sont indépendantes.

387. $y_1+y_2-y_3-y_4=0$. 388. $y_1-y_2+y_3=0$; $5y_1-4y_2+y_4=0$.

389. Les formes sont indépendantes. 390. Les formes sont indépendantes.

391. $y_1+y_2-y_3-y_4=0$. 392. $2y_1-y_2-y_3=0$.

393. $3y_1-y_2-y_3=0$; $y_1-y_2-y_4=0$.

394. Les formes sont indépendantes. 395. $y_1-y_2-y_3-y_4=0$.

396. $3y_1-2y_2-y_3+y_4=0$; $y_1-y_2+2y_3-y_5=0$.

397. $\lambda=10$; $3y_1+2y_2-5y_3-y_4=0$.

398. $x_3=2x_2-x_1$; $x_4=1$. 399. $\lambda=5$.

400. Le système n'a pas de solution. 401. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-2$.

402. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=1$. 403. $x_1=-\frac{11x_3}{7}$; $x_2=-\frac{x_3}{7}$.

404. Le système n'a pas de solution. 405. $x_1=0$; $x_2=2$; $x_3=\frac{5}{3}$; $x_4=-\frac{4}{3}$.

406. $x_1=-8$; $x_2=3+x_4$; $x_3=6+2x_4$.

407. $x_1=2$; $x_2=x_3=x_4=1$. 408. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

409. $x_1=\frac{3x_3-13x_4}{17}$; $x_2=\frac{19x_3-20x_4}{17}$.

410. $x_1=\frac{7}{6}x_5-x_3$; $x_2=\frac{5}{6}x_5+x_3$; $x_4=\frac{x_5}{3}$.

411. $x_1=-16+x_3+x_4+5x_5$; $x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5$.

412. $x_1=\frac{-4x_4+7x_5}{8}$; $x_2=\frac{-4x_4+5x_5}{8}$; $x_3=\frac{4x_4-5x_5}{8}$.

413. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = x_5$.

414. $x_1 = \dfrac{1+x_5}{3}$; $x_2 = \dfrac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}$.

415. $x_1 = \dfrac{2+x_5}{3}$; $x_2 = \dfrac{1+3x_3-3x_4+5x_5}{6}$.

416. Le système n'a pas de solution.
417. Le système n'a pas de solution.

418. $x_1 = -\dfrac{x_5}{2}$, $x_2 = -1-\dfrac{x_5}{2}$; $x_3 = 0$; $x_4 = -1-\dfrac{x_5}{2}$.

419. $x_1 = \dfrac{1+5x_4}{6}$; $x_2 = \dfrac{1-7x_4}{6}$; $x_3 = \dfrac{1+5x_4}{6}$.

420. Le système n'a pas de solution.

421. $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $y = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $z = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

422. Si $(\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0$, $x = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}$; $y = \dfrac{1}{\lambda+2}$; $z = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.

Si $\lambda = 1$, le système possède les solutions dépendant de deux paramètres.
Si $\lambda = -2$, le système n'a pas de solution.

423. Si $(\lambda-1)(\lambda+3) \neq 0$, $x = -\dfrac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+3}$; $y = -\dfrac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda+3}$;

$$z = \frac{2\lambda+1}{\lambda+3};\quad t = -\frac{\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+3}.$$

Si $\lambda = 1$, le système possède les solutions dépendant de trois paramètres.
Si $\lambda = -3$, le système n'a pas de solution.
424. Si a, b, c sont tous distincts,

$$x = abc;\ y = -(ab+ac+bc);\ z = a+b+c.$$

Si parmi les paramètres a, b, c deux sont égaux, les solutions dépendent d'un paramètre.

Si $a = b = c$, les solutións dépendent de deux paramètres.

425. Si a, b, c sont tous distincts,

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)};\quad y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)};\quad z = \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

Si $a = b$; $a \neq c$; $d = a$ ou $d = c$, les solutions dépendent d'un paramètre.
Si $b = c$; $a \neq b$; $d = a$ ou $d = b$, les solutions dépendent d'un paramètre.
Si $a = c$; $a \neq b$; $d = a$ ou $d = b$, les solutions dépendent d'un paramètre.
Si $a = b = c = d$, les solutions dépendent de deux paramètres.
Dans tous les autres cas, le système n'a pas de solution.

426. Si $b(a-1) \neq 0$, $x = \dfrac{2b-1}{b(a-1)}$; $y = \dfrac{1}{b}$; $z = \dfrac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$.

Si $a = 1$; $b = \dfrac{1}{2}$, les solutions dépendent d'un paramètre.

Dans tous les autres cas, le système n'a pas de solution.

427. Si $b(a-1)(a+2) \neq 0$, $x = z = \dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)}$; $y = \dfrac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$.

Si $a = -2$; $b = -2$, les solutions dependent d'un parametre.
Si $a = 1$; $b = 1$, les solutions dependent de deux parametres.
Dans tous les autres cas le système n'a pas de solution.

428. Si $(\alpha-1)(\alpha+2) \neq 0$, $x = \frac{m\alpha+m-n-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)}$;

$$y = \frac{n\alpha+n-m-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)}; \quad z = \frac{p\alpha+p-m-n}{(\alpha+2)(\alpha-1)}.$$

Si $\alpha = -2$ et $m + n + p = 0$, les solutions dépendent d'un paramètre.
Si $\alpha = 1$ et $m = n = p$, les solutions dependent de deux paramètres.
Dans tous les autres cas le systeme n'a pas de solution.

429. Si $a(a-b) \neq 0$, $x = \frac{a^2(b-1)}{b-a}$; $y = \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}$; $z = \frac{a-1}{a(b-a)}$.

Si $a = b = 1$, les solutions dependent de deux parametres. Dans tous les autres cas le systeme n'a pas de solution.

430. $\Delta = \lambda^2(\lambda - 1)$. Pour $\lambda = 0$; $\lambda = 1$ le système est incompatible.

431. $\Delta = -2\lambda$. Si $\lambda \neq 0$, $x = 1 - \lambda$; $y = \lambda$; $z = 0$. Si $\lambda = 0$, $x = 1$; $z = 0$; y est arbitraire.

432. $\Delta = (k-1)^2(k+1)$. Si $k = 1$, la solution depend d'un parametre. Si $k = -1$, le systeme est incompatible.

433. $\Delta = a(b-1)(b+1)$.

Si $a = 0$; $b = 5$, $y = -\frac{1}{3}$; $z = \frac{4}{3}$; x est arbitraire.

Si $a = 0$; $b \neq 1$ et $b \neq 5$, le systeme est incompatible.
Si $b = 1$, $z = 0$; $y = 1 - ax$; x est arbitraire.
Si $b = -1$, le système est incompatible.

434. a) $\Delta = -m(m+2)$. Pour $m = 0$ et $m = -2$ le système est incompatible.

b) $\Delta = m(m^2-1)$. Si $m = 0$; $m = 1$, le système est incompatible. Si $m = -1$, la solution depend d'un parametre.

c) $\Delta = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$. Si $\lambda = 1$; $\lambda = -1$, le système est incompatible. Si $\lambda = 0$, la solution dépend d'un parametre.

435. a) $\Delta = 3(c+1)(c-1)^2$. Si $c = -1$, le systeme est incompatible. Si $c = 1$, la solution depend de deux parametres.

b) $\Delta = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Si $\lambda = 2$; $\lambda = 3$, le systeme est incompatible. Si $\lambda = 1$, la solution dépend d'un parametre.

c) $\Delta = d(d-1)(d+2)$. Si $d = 1$; $d = -2$, le systeme est incompatible. Si $d = 0$, la solution depend d'un parametre.

d) $\Delta = (a-1)^2(a+1)$. Si $a = -1$, le systeme est incompatible. Si $a = 1$, la solution depend de deux paramètres.

436.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

437. Si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

438. Si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

439. Si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} x_0^2+y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

440. $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$. 441. $y^2 - y = 0$. 442. $y = x^3 - 1$.

443. $$\begin{vmatrix} y & x^n & x^{n-1} & \dots & x^2 & x & 1 \\ y_0 & x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

444. Si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

445. $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0.$

446. Si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

est inférieur à trois.

447. Si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

est inférieur à trois.

448. Dans un même plan si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{pmatrix}$$

est inférieur à quatre. Sur une même droite si, et seulement si, le rang de cette matrice est inférieur à trois.

449. Tous les plans passent par un même point si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{pmatrix}$$

est inférieur à quatre; ils passent par une même droite si, et seulement si, le rang de cette matrice est inférieur à trois.

450. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

453. Non. 454. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 455. Oui.

456. Solution. Soit

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn}\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr}\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}\sum_{s=1}^{r}\lambda_{1s}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r}\lambda_{1s}\alpha_{sn}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \sum_{s=1}^{r}\lambda_{rs}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r}\lambda_{rs}\alpha_{sn}\end{pmatrix}.$$

On voit tout de suite que les lignes de la matrice BA sont les solutions du système. Par ailleurs, comme $|B|\neq 0$, $A=B^{-1}(BA)$, autrement dit, les solutions données par la matrice A sont les combinaisons linéaires des solutions données par la matrice BA.

457. Solution. Soit

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn}\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \dots & \gamma_{rn}\end{pmatrix}.$$

Puisque C représente le système fondamental de solutions, $\alpha_{11}=\lambda_{11}\gamma_{11}+\lambda_{12}\gamma_{21}+\dots+\lambda_{1r}\gamma_{r1}$ et ainsi de suite, autrement dit $A=BC$, où

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr}\end{pmatrix}.$$

D'autre part, A aussi représente un système fondamental de solutions et c'est pourquoi $|B|\neq 0$.

459. Par exemple,

$x_1=c_1+c_2+5c_3$; $x_2=-2c_1-2c_2-6c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=c_3$ (cf. la réponse du problème nº 454).

460. $x_1=11c$; $x_2=c$; $x_3=-7c$.

461. № 408. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

№ 409. $x_1=3c_1+13c_2$; $x_2=19c_1+20c_2$; $x_3=17c_1$; $x_4=-17c_2$.

№ 410. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=-c_1+5c_2$; $x_3=-c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=6c_2$.

№ 412. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=c_1+5c_2$; $x_3=-c_1-5c_2$; $x_4=-2c_1$; $x_5=8c_2$.

№ 413. $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=c$; $x_5=c$.

462. $x_1=-16+c_1+c_2+5c_3$;

$x_2=23-2c_1-2c_2-6c_3$;

$x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=c_3$.

463. № 406. $x_1=-8$; $x_2=3+c$; $x_3=6+2c$; $x_4=c$.

№ 414. $x_1=c_3$; $x_2=2+c_1+c_2-5c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=-1+3c_3$.

№ 415. $x_1=1+2c_3$; $x_2=1+c_1-c_2+5c_3$; $x_3=2c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=1+6c_3$.

Chapitre 4

MATRICES

464. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$.

465. a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

466. $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

ou $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{n}$. Par consequent,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

La limite du premier facteur est egale à 1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\varphi = \alpha \lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \alpha$. C'est pourquoi

$$\lim \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

467. a) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$.

b) $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$.

c) Se démontre par récurrence.

468. a) $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

469. a) $\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{pmatrix}=(x-y)E+yA$;

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}=(x-y)E+yA$; c) $\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 3t-3x-u & t-3y-v & t \end{pmatrix}$.

470. a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

471. Se vérifie par calcul direct.

472. Les polynômes $F(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ tels que $F(A)=0$ existent, car l'égalité $F(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_mA^m=0$ est équivalente au système de n^2 équations linéaires homogènes à $m+1$ inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_m$, qui pour $m \geqslant n^2$ possède des solutions non triviales. Soient $F(x)$ un polynôme quelconque pour lequel $F(A)=0$ et $f(x)$ le polynôme de degré le plus petit parmi les polynômes jouissant de cette propriété. Alors $F(x)=$ $=f(x)q(x)+r(x)$, où $r(x)$ est un polynôme dont le degré est inférieur à celui de $f(x)$. Nous avons $r(A)=F(A)-f(A)\cdot q(A)=0$, par conséquent, $r(x)=0$, sinon il y aurait contradiction avec le choix de $f(x)$. Ainsi, $F(x)=f(x)q(x)$.

473. Soit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

La somme des éléments diagonaux de la matrice AB est alors égale à $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$. La somme des éléments diagonaux de la matrice BA est exactement la même. Aussi la somme des éléments diagonaux de la matrice $AB-BA$ est nulle et l'équation $AB-BA=E$ est impossible.

Remarque. Ce résultat n'est pas vrai pour les matrices avec des éléments du champ de caractéristique $p \neq 0$. En effet, dans le champ de caractéristique p pour les matrices d'ordre p:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p-1 & 0 \end{pmatrix},$$

nous avons $AB-BA=E$.

474. $(E-A)(E+A+A^2+\ldots+A^{k-1})=E-A^k=E$.

475. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $bc=-a^2$.

476. Si $A^3=0$, alors $A^2=0$. En effet, si $A^3=0$, on a $|A|=0$. Par conséquent (cf. 471), $A^2=(a+d)A$, $0=A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$, d'où $a+d=0$ et $A^2=0$.

477. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2=1-bc$.

478. Si $A=0$, X est une matrice quelconque. Si $|A|\neq 0$, alors $X=0$. Enfin, si $|A|=0$, mais $A\neq 0$, les lignes de la matrice A sont proportionnelles. Soit $\alpha:\beta$ le rapport des éléments correspondants de la première et de la deuxième ligne de la matrice A. Alors $X=\begin{pmatrix} -\beta x & \alpha x \\ -\beta y & \alpha y \end{pmatrix}$ pour tout x, y.

479. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $A\neq 0$, mais $a+d=0$, $ad-bc=0$, aucune solution n'existe;

2) si $a+d\neq 0$, $(a-d)^2+4bc=0$, $(a-d)$, b, c ne sont pas simultanément nuls, deux solutions existent:

$$X=\pm\frac{1}{2\sqrt{2(a+d)}}\begin{pmatrix} 3a+d & 2b \\ 2c & a+3d \end{pmatrix};$$

3) si $a+d\neq 0$, $ad-bc=0$, deux solutions existent:

$$X=\pm\frac{1}{\sqrt{a+d}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

4) si $ad-bc\neq 0$, $(a-d)^2+4bc\neq 0$, quatre solutions existent:

$$X=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+a-d}{2} & b \\ c & \frac{\lambda^2-a+d}{2} \end{pmatrix},$$

où $\lambda=\pm\sqrt{a+d\pm 2\sqrt{ad-bc}}$;

5) si $a-d=b=c=0$, un nombre infini de solutions existe:

$$X=\pm\sqrt{a}E \quad \text{et} \quad X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix},$$

où x, y, z sont liés par la relation $x^2+yz=a$.

480. a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

f) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; h) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$;

i) $\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \dots & \varepsilon^{-n+1} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \dots & \varepsilon^{-2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{-n+1} & \varepsilon^{-2n+2} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$;

j) $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1\cdot n & 1\cdot(n-1) & 1\cdot(n-2) & \dots & 1\cdot 1 \\ 1\cdot(n-1) & 2\cdot(n-1) & 2\cdot(n-2) & \dots & 2\cdot 1 \\ 1\cdot(n-2) & 2\cdot(n-2) & 3\cdot(n-2) & \dots & 3\cdot 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & \dots & n\cdot 1 \end{pmatrix}$;

k) $\frac{1}{2n^3}\begin{pmatrix} 2-n^2 & 2+n^2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2-n^2 & 2+n^2 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 2+n^2 & 2 & 2 & \dots & 2-n^2 \end{pmatrix}$;

l) $\frac{1}{d}\begin{pmatrix} b_1c_1+d & b_2c_1 & \dots & b_nc_1 & -c_1 \\ b_1c_2 & b_2c_2+d & \dots & b_nc_2 & -c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ b_1c_n & b_2c_n & \dots & b_nc_n+d & -c_n \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_n & 1 \end{pmatrix}$,

où $d=a-b_1c_1-b_2c_2-\dots-b_nc_n$;

m) $\frac{1}{f}\begin{pmatrix} f-f_0x^n & xf-f_1x^n & \dots & x^{n-1}f-f_{n-1}x^n & x^n \\ -f_0x^{n-1} & f-f_1x^{n-1} & \dots & x^{n-2}f-f_{n-1}x^{n-1} & x^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -f_0x & -f_1x & & f-f_{n-1}x & x \\ -f_0 & -f_1 & & -f_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$.

où $f_0=a_0$, $f_1=a_0x+a_1, \dots, f_{n-1}=a_0x^{n-1}+\dots+a_{n-1}$, $f=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots$ $\dots+a_n$;

n) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \dots & \lambda_1\lambda_n \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2\lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_n\lambda_1 & \lambda_n\lambda_2 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$,

$$\mu=1+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n;$$

o) $\begin{pmatrix} B^{-1}+\lambda B^{-1}UVB^{-1} & -\lambda B^{-1}U \\ -\lambda VB^{-1} & \lambda \end{pmatrix}$, $\quad \lambda=\frac{1}{a-VB^{-1}U}$.

481. a) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$; e) $X = E - \frac{n-1}{n^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

f) $X = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ -2a & 1-2b \end{pmatrix}$; g) X n'existe pas.

482. Il suffit de multiplier à droite et à gauche l'égalité $AB = BA$ par A^{-1}.

483. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

484. Si $A^3 = E$, alors $|A|^3 = 1$, et, comme les matrices doivent être réelles, $|A| = 1$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors, égalant A^{-1} et A^2, nous obtenons aisément que $A = E$ ou bien $a+d = -1$, $ad - bc = 1$.

485. $A = \pm E$ ou $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, de plus, $a^2 + bc = \pm 1$.

486. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE + bI$, où $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $I^2 = -E$ et, par conséquent, la correspondance $aE + bI \to a + bi$ est un isomorphisme.

487. Posons $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = aE + bI + cJ + dK$, où $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Donc $I^2 = J^2 = K^2 = -E$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$. Il en découle que le produit de deux matrices de la forme $a + bI + cJ + dK$ est une matrice de la même forme. Il en sera de même pour la somme et la différence, de sorte que l'ensemble de matrices considéré est un anneau. Ensuite

$$|A| = \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0, \text{ si } A \neq 0.$$

Donc, chaque matrice non nulle possède une inverse et de l'équation $A_1A_2 = 0$ (ou $A_2A_1 = 0$) pour $A_1 \neq 0$ il découle que $A_2 = 0$. L'anneau des matrices considéré réalise l'algèbre dit des quaternions.

488. $(a_1E + b_1I + c_1J + d_1K)(a_2E + b_2I + c_2J + d_2K) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)E + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)I + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)J + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)K$. Passant aux déterminants

nous obtenons $(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2 -$ $- c_1c_2 - d_1d_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)^2 + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 +$ $+ d_1b_2)^2 + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)^2$.

489. La permutation de deux lignes de la matrice est réalisée en multipliant à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix}
1 \\
& \ddots \\
&& 1 \\
&&& 0 & \cdots & & 1 \\
&&& \vdots & 1 & & \vdots \\
&&& & & \ddots & \\
&&& \vdots & & 1 & \vdots \\
&&& 1 & \cdots & & 0 \\
&&&&&&& 1 \\
&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}.$$

L'opération b est réalisée en multipliant à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix}
1 \\
& \ddots \\
&& 1 & \cdots & \alpha \\
&&& \ddots & \vdots \\
&&&& 1 \\
&&&&& \ddots \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix}
1 \\
& \ddots \\
&& 1 \\
&& \vdots & \ddots \\
&& \alpha & \cdots & 1 \\
&&&&& \ddots \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}.$$

L'opération c est réalisée en multipliant à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix}
1 \\
& \ddots \\
&& 1 \\
&&& \alpha \\
&&&& 1 \\
&&&&& \ddots \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}.$$

Les opérations a, b, c sur les colonnes sont réalisées par multiplication à droite par les mêmes matrices.

490. Comme on le sait, chaque matrice A peut être ramenée à la forme diagonale R par les transformations élémentaires a, b, c sur les lignes et les colonnes. C'est pourquoi pour la matrice donnée A on peut trouver une matrice de la forme R telle que $R = U_1U_2 \ldots U_mAV_1V_2 \ldots V_k$, où $U_1, \ldots, U_m$,

$V_1, \ldots, V_k$ sont des matrices de transformations élémentaires. Ces matrices sont toutes non singulières et possèdent les matrices inverses.

Par conséquent, $A = PRQ$, où P et Q sont des matrices non singulières.

491. En vertu des résultats des problèmes nos 489, 490, il suffit de démontrer le théorème pour les matrices diagonales et les matrices correspondant à l'opération a, les matrices correspondant à l'opération b ayant la forme demandée. Il est facile de voir que l'opération a se ramène aux opérations b et c. En effet, pour intervertir deux lignes, on peut ajouter la première à la seconde, puis retrancher la seconde de la première, ensuite ajouter la première à la seconde et enfin multiplier la première par -1. Ceci est équivalent à l'identité matricielle $E - e_{ii} - e_{kk} + e_{ik} + e_{ki} = (E - 2e_{kk})(E + e_{ik})(E - e_{ki})(E + e_{ik})$. Pour les matrices diagonales le théorème est évident :

$$a_1e_{11} + a_2e_{22} + \ldots + a_ne_{nn} = (E + (a_1 - 1)e_{11})(E + (a_2 - 1)e_{22}) \ldots \ldots (E + (a_n - 1)e_{nn}).$$

492. Soit

$$A = P_1R_1Q_1, \quad B = P_2R_2Q_2,$$

où P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont des matrices non singulières et R_1 et R_2 des matrices ayant respectivement r_1 et r_2 éléments égaux à l'unité sur la diagonale principale et dont les autres éléments sont nuls. Dans ce cas $AB = P_1R_1Q_1P_2R_2Q_2$, et le rang de AB est égal à celui de R_1CR_2, où $C = Q_1P_2$ est une matrice non singulière. La matrice R_1CR_2 s'obtient de la matrice C en remplaçant tous les éléments des dernières $n - r_1$ lignes et $n - r_2$ colonnes par des zéros. Etant donné que la suppresion d'une ligne ou d'une colonne fait abaisser le rang de la matrice d'au plus une unité, le rang de R_1CR_2 n'est pas inférieur à $n-(n-r_1)-(n-r_2) = r_1 + r_2 - n$.

493. Découle directement de la proportionnalité de toutes les lignes de la matrice de rang 1.

494. En vertu du résultat du problème no 492, le rang de la matrice recherchée A est égal à 1 ou 0. Par conséquent,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix}$$

La multiplication immédiate donne

$$0 = A^2 = (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3) A,$$

d'où il vient que $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 0$.

495. Supposons que A donne une solution du problème différente de la solution triviale $A = \pm E$. Donc l'une des matrices $A - E$ ou $A + E$ est de rang 1.

Supposons que

$$A + E = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix} = B.$$

Donc

$$A^2 = E - 2B + B^2 = E + (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 - 2) B,$$

d'où il découle que pour que $A^2 = E$ il faut et il suffit que soit réalisée la condition $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 2$. De façon analogue on considère aussi le deuxième cas.

496. Supposons qu'on ajoute à la matrice (A, B), où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1s} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \ldots & b_{ms} \end{pmatrix}.$$

la colonne $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ dont l'adjonction à la matrice B n'augmente pas le rang de celle-ci. Dans ce cas le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} b_{11}y_1 + \dots + b_{1s}y_s &= c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}y_1 + \dots + b_{ms}y_s &= c_m \end{aligned}$$

est compatible. Mais dans ce cas le système

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + b_{11}y_1 + \dots + b_{1s}y_s &= c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k + b_{m1}y_1 + \dots + b_{ms}y_s &= c_m \end{aligned}$$

est aussi compatible. Par conséquent, le rang de la matrice (A, B) est égal au rang de la matrice (A, B, C).

Supposons maintenant qu'on adjoint à la matrice A les colonnes de la matrice B une par une. En vertu de ce que nous venons de démontrer le rang de la matrice ne peut alors augmenter de 1 que quand le rang de la matrice B augmente. Par conséquent, le rang de $(A, B) \leqslant$ rang de A + rang de B.

497. Soient r_1 et r_2 le rang des matrices $(E + A)$ et $(E - A)$. Etant donné que $(E + A) + (E - A) = 2E$, $r_1 + r_2 \geqslant n$. D'autre part, $(E + A)(E - A) = 0$, de sorte que $0 \geqslant r_1 + r_2 - n$. Par conséquent, $r_1 + r_2 = n$.

498. Le rang de la matrice $(E + A, E - A)$ est égal à n. Isolons de cette matrice une matrice carrée non singulière P d'ordre n. Supposons que ses premières r colonnes appartiennent à $E + A$, et les $n - r$ colonnes restantes à $E - A$. Donc, en vertu de $(E + A)(E - A) = 0$ nous avons

$$(E+A)P=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$(E-A)P=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & q_{1,r+1} & \dots & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & q_{n,r+1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

En additionnant ces égalités, nous obtenons

$$2P=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & q_{1,r+1} & \dots & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & q_{n,r+1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Et les retranchant l'une de l'autre, nous obtenons

$$2AP=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & -q_{1,r+1} & \dots & -q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & -q_{n,r+1} & \dots & -q_{nn} \end{pmatrix}=2P\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où il découle immédiatement ce qu'il fallait démontrer.

499. Si $AA^{-1} = E$ et si les deux matrices sont formées de nombres entiers, nous avons $|A||A^{-1}| = 1$, d'où il vient que $|A| = \pm 1$, puisque $|A|$ et $|A|^{-1}$ sont des nombres entiers. Il est évident que la condition $|A| = \pm 1$ est aussi suffisante pour que les éléments de la matrice A^{-1} soient des nombres entiers.

500. Soit A une matrice non singulière à éléments entiers. Parmi les éléments de sa première colonne il y en a non nuls. En multipliant certaines lignes de la matrice A par -1, on peut obtenir que tous les éléments de la première colonne deviennent non négatifs. Choisissons parmi ces éléments positifs celui qui est le plus petit et retranchons la ligne qui lui correspond d'une autre ligne quelconque dont l'élément correspondant à la première colonne est positif. Nous obtenons de nouveau une matrice avec des éléments non négatifs dans la première colonne, mais l'un d'eux est plus petit que celui de la matrice initiale. Nous continuons le processus autant qu'il est possible. Après avoir répété ce procédé un nombre fini de fois nous obtenons une matrice dont les éléments de la première colonne, sauf un positif, sont tous nuls. Par permutation de deux lignes nous portons l'élément non nul de la première colonne dans la première ligne. Ensuite, sans toucher à la première ligne, nous obtenons par les mêmes opérations que l'élément de la diagonale de la deuxième colonne soit positif et tous les éléments situés au-dessous nuls. Opérons ensuite avec la troisième colonne et ainsi de suite. En définitive la matrice sera réduite à une forme triangulaire. Alors, en ajoutant (ou en retranchant) un nombre approprié de fois chaque ligne à celles qui se trouvent au-dessus, nous obtenons que les éléments qui sont au-dessus de la diagonale principale vérifient les exigences du problème.

Toutes les opérations citées sont équivalentes à la multiplication à gauche par certaines matrices unimodulaires, d'où il découle directement le résultat recherché.

501. Soit $A = P_1R_1 = P_2R_2$, où les matrices P_1, R_1 et P_2, R_2 vérifient les conditions du problème nº 500. Il vient alors de l'égalité $P_2^{-1}P_1 = R_2R_1^{-1}$ que la matrice unimodulaire à éléments entiers $C = P_2^{-1}P_1$ a elle aussi une forme triangulaire. Soit

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nous concluons en premier lieu de l'égalité $R_2 = CR_1$ que $b_{11} = c_{11}a_{11}, \dots, b_{nn} = c_{nn}a_{nn}$, d'où il découle que tous les c_{ii} sont positifs. Mais $c_{11}c_{22} \dots c_{nn} = |c| = \pm 1$, par conséquent, $c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = 1$ et $a_{ii} = b_{ii}$.

Ensuite, $b_{12} = c_{11}a_{12} + c_{12}a_{22} = a_{12} + c_{12}a_{22}$, d'où $c_{12} = \frac{b_{12} - a_{12}}{a_{22}}$. Mais $0 \leqslant b_{12} < b_{22} = a_{22}$, $0 \leqslant a_{12} < a_{22}$, par conséquent, $|c_{12}| < 1$, et c'est pourquoi $c_{12} = 0$. De façon analogue, comparant successivement (par colonnes) les éléments restants dans l'égalité matricielle $CR_1 = R_2$, nous verrons que tous les $c_{ik} = 0$ pour $k > i$, c'est-à-dire que $C = E$, par conséquent, $R_1 = R_2$, $P_1 = P_2$. Ainsi il se trouvera dans chaque classe une et seulement une matrice de la forme R.

Le nombre de matrices R aux éléments diagonaux donnés $d_1, d_2, \dots, d_n$ est évidemment égal à $d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$, et, par conséquent, le nombre de matrices R avec un déterminant donné k est égal à $F_n(k) = \sum d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$, où la sommation est étendue à tous les nombres positifs entiers $d_1, d_2, \dots, d_n$ vérifiant la condition $d_1d_2 \dots d_n = k$. Si $k = ab$, $(a, b) = 1$, chaque facteur d_i dans l'égalité $k = d_1d_2 \dots d_n$ se décompose de façon unique en deux facteurs α_i,

β_i tels que $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=a$, $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n=b$. Par conséquent,

$$F_n(k)=\sum_{d_1d_2\ldots d_n=k} d_2d_3^2\ldots d_n^{n-1}=\sum_{\substack{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=a\\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_n=b}}\alpha_2\alpha_3^2\ldots\alpha_n^{n-1}\beta_2\beta_3^2\ldots\beta_n^{n-1}=$$

$$=\sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=a}\alpha_2\alpha_3^2\ldots\alpha_n^{n-1}\cdot\sum_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n=b}\beta_2\beta_3^2\ldots\beta_n^{n-1}=F_n(a)\cdot F_n(b).$$

Il en résulte que si $k=p_1^{m_1}\ldots p_s^{m_s}$ est la décomposition canonique de k en facteurs simples, on a

$$F_n(k)=F_n(p_1^{m_1})\ \ldots\ F_n(p_s^{m_s}).$$

Il reste à calculer $F_n(p^m)$. Dans ce but nous divisons la somme qui sert à calculer $F_n(p^m)$ en deux parties, dans la première $d_n=1$ et dans la seconde d_n est divisible par p, $d_n=pd_n'$. Ceci donne la formule $F_n(p^m)=F_{n-1}(p^m)+$ $+p^{n-1}F_n(p^{m-1})$, qui permet d'établir aisément par une méthode de récurrence que

$$F_n(p^m)=\frac{(p^{m+1}-1)(p^{m+2}-1)\ldots(p^{m+n-1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{n-1}-1)}.$$

502. Choisissant l'élément non nul de la matrice le plus petit en valeur absolue, nous le portons dans l'angle gauche supérieur par permutation des lignes et des colonnes. Ensuite nous ajoutons la première ligne et la première colonne à toutes les autres lignes et colonnes ou bien nous les en retranchons autant de fois qu'il le faut pour que les éléments de la première ligne et de la première colonne deviennent tous inférieurs en valeur absolue à l'élément de l'angle. Ensuite nous répétons l'opération. Le procédé s'arrêtera après un nombre fini de pas, car après chaque pas il y a dans l'angle gauche supérieur un élément inférieur au précédent en valeur absolue. Le processus ne prendra fin que lorsque tous les éléments de la première ligne et de la première colonne, sauf l'élément de l'angle, deviennent nuls. Après cela, transformons par le même procédé la matrice formée des $2^{\text{èmes}}$, . . ., $n^{\text{èmes}}$ lignes et colonnes. En définitive, la matrice sera réduite à la forme diagonale. En vertu du résultat du problème n° 489, toutes les transformations mentionnées sont équivalentes à la multiplication à droite et à gauche par des matrices unimodulaires.

503. La multiplication à gauche par la matrice A^m est équivalente à ajouter à la première ligne la deuxième multipliée par m. La multiplication à gauche par B^m est équivalente à ajouter à la deuxième ligne la première multipliée par m.

Soit $U=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice donnée à éléments entiers dont le déterminant est 1. Divisons a par c avec un reste: $a=mc+a_1$, $0\leqslant a_1<|c|$; divisons ensuite c par a_1: $c=m_1a_1+c_2$, $0\leqslant c_2<a_1$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division s'effectue sans reste. Alors $A^{-m}U=U_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c & d\end{pmatrix}$, $B^{-m}U_1=U_2=$ $=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$, et ainsi de suite. Nous parvenons en définitive à la matrice U_{k+1} de la forme $\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ 0 & d_{k+1}\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}0 & b_{k+1}\\ c_k & d_k\end{pmatrix}$. Par ailleurs, tous les a_k, c_k étant positifs et U_{k+1} unimodulaire, nous avons $a_k=d_{k+1}=1$ dans le premier cas, $c_k=-b_{k+1}=$ $=1$ dans le second. Ainsi, $U_{k+1}=\begin{pmatrix}1 & b_k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A^{b_k}$ dans le premier cas, $U_{k+1}=$ $=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & d_k\end{pmatrix}=A^{-1}BA^{d_{k-1}}$ dans le second. Le théorème est démontré.

504. La matrice dont le déterminant est -1 se transforme, en la multipliant par C, en une matrice dont le déterminant est 1. Chaque matrice de ce type est le produit des puissances de A et B. Mais $B = CAC$.

505. Soit $|A| = 1$, $A^2 = E$, $A \neq E$. Alors (problème n° 498)

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

pour une matrice non singulière P. Déterminons la matrice P de façon qu'elle soit à éléments entiers et de déterminant le plus petit possible. Etant donné que $A+E = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, la matrice $A+E$ est de rang 1 et, par conséquent,

$$A+E = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix},$$

et en outre $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 2$ (problème n° 495). La matrice $A + E$ étant à éléments entiers, on peut supposer que les nombres λ_1, λ_2, λ_3 et les nombres μ_1, μ_2, μ_3 sont entiers.

Formant un système d'équations pour les éléments de la matrice P, on vérifie aisément que l'on peut prendre en tant que P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & -\delta \\ \lambda_2 & \frac{\mu_3}{\delta} & u\mu_1 \\ \lambda_3 & -\frac{\mu_2}{\delta} & v\mu_1 \end{pmatrix},$$

où δ est le plus grand commun diviseur de μ_2, μ_3 et u, v sont des nombres entiers tels que $u\mu_2 + v\mu_3 = \delta$.

Le déterminant de la matrice P est égal à 2.

En vertu du résultat du problème n° 500, $P = QR$, où Q est une matrice unimodulaire et R l'une des sept matrices triangulaires possibles de déterminant 2.

C'est pourquoi $Q^{-1}AQ$ est égale à l'une des sept matrices $R \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} R^{-1}$.

Parmi ces matrices, trois seulement sont distinctes, et en outre deux d'entre elles sont converties l'une en l'autre par transformation de matrice unimodulaire. Il reste les deux matrices indiquées dans les conditions du problème.

506. a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; d) 13. **507.** 45.

508. Le résultat est l'identité d'Euler:

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) =$$
$$= (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2.$$

509. Le mineur formé par les éléments des lignes d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ et des colonnes d'indices $k_1, k_2, \ldots, k_m$ est le déterminant du produit de la matrice formée des lignes $i_1, i_2, \ldots, i_m$ du premier facteur par la matrice formée des colonnes $k_1, k_2, \ldots, k_m$ du second. C'est pourquoi il est égal à la somme des produits de tous les mineurs possibles d'ordre m, formés des lignes de la première matrice d'indices $i_1, i_2, \ldots i_m$, par les mineurs correspondants formés des colonnes de la deuxième matrice d'indices $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

510. Le mineur diagonal de la matrice $\bar{A}A$ est égal à la somme des carrés de tous les mineurs de même ordre de la matrice A, formés des éléments des colonnes ayant les mêmes indices que les colonnes de la matrice $\bar{A}A$ contenant le mineur considéré. Donc il est non négatif.

511. Si tous les mineurs principaux d'ordre k de la matrice $\bar{A}A$ sont nuls, en vertu du résultat du problème nº 510, tous les mineurs d'ordre k de la matrice A sont nuls. Aussi le rang de la matrice A et donc le rang de la matrice $\bar{A}A$ est inférieur à k.

512. La somme de tous les mineurs diagonaux d'ordre k de la matrice $\bar{A}A$ est égale à la somme des carrés de tous les mineurs d'ordre k de la matrice A. La somme de tous le mineurs diagonaux d'ordre k de la matrice $A\bar{A}$ est égale au même nombre.

513. S'obtient par application du théorème sur le déterminant du produit de deux matrices au produit de la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ par sa transposée.

514. S'obtient par application du théorème sur le déterminant du produit à

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \\ \ldots & \ldots \\ a_n' & b_n' \end{pmatrix}.$$

515. Découle directement de l'identité du problème nº 513. Le signe d'égalité n'est possible que si le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ est inférieur à deux, c'est-à-dire si les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots b_n$ sont proportionnels.

516. Découle immédiatement de l'identité du problème nº 514. Le signe d'égalité n'est possible que si les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont proportionnels.

517. Supposons que la matrice B possède m colonnes et la matrice C k colonnes. D'après le théorème de Laplace, $|A| = \sum B_i C_i$, où B_i sont tous les déterminants possibles d'ordre m formés à partir de la matrice B et C_i leurs cofacteurs égaux, au signe près, aux déterminants d'ordre k formés à partir de la matrice C. En vertu de l'inégalité de Bouniakovsky (problème nº 515) $|A|^2 \leqslant \sum B_i^2 \sum C_i^2$. Mais $\sum B^2 = |\bar{B}B|$, $\sum C_i^2 = |\bar{C}C|$.

518. Soit

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nk} \end{pmatrix}; \qquad A = (B, C).$$

L'inégalité à démontrer est triviale si $m + k > n$; pour le cas $m + k = n$, cette inégalité est établie au problème nº 517. Il reste à considérer le cas $m + k < n$. Supposons d'abord que $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} c_{is} = 0$ pour tous les j, s. Alors

$$\bar{A}A = \begin{pmatrix} \bar{B}B & 0 \\ 0 & \bar{C}C \end{pmatrix} \text{ et, par conséquent, } |\bar{A}A| = |\bar{B}B| \cdot |\bar{C}C|.$$

Dans le cas général il suffit de résoudre le problème en supposant que le rang de la matrice A est égal à $m + k$, car, dans le cas contraire, l'inégalité est triviale.

Complétons la matrice A jusqu'à obtenir une matrice carrée (A, D) telle que le rang de la matrice D soit égal à $n - m - k$ et les sommes des produits des éléments de n'importe quelle colonne de la matrice D par les éléments de n'importe quelle colonne de la matrice A soient nulles. Cela peut être effectué, par exemple, de la manière suivante. Nous complétons d'abord la matrice A jusqu'à obtenir une matrice carrée non singulière $\varepsilon' = (A, D')$, ce qui est évidemment possible; nous remplaçons ensuite tous les éléments de la matrice D' par leurs cofacteurs dans $|\varepsilon'|$. Le rang de la matrice D ainsi construite est égal au nombre de ses colonnes $n - m - k$, car elle représente une partie de la matrice formée des cofacteurs de la matrice ε', qui ne diffère de la matrice non singulière $(\bar{\varepsilon}')^{-1}$ que par le facteur $|\varepsilon'|$.

Désignons (A, D) par P, (C, D) par Q. Alors, en vertu du résultat du problème nº 517, $|\bar{P}P| \leqslant |\bar{B}B| \cdot |\bar{Q}Q|$. Mais $|\bar{P}P| = |\bar{A}A| \cdot |\bar{D}D|$ et $|\bar{Q}Q| = |\bar{C}C| \cdot |\bar{D}D|$. Il en résulte, puisque $|\bar{D}D| > 0$, que

$$|\bar{A}A| \leqslant |\bar{B}B| \cdot |\bar{C}C|.$$

519. Découle immédiatement du résultat du problème nº 518, appliqué à la matrice $\bar{A}$.

520. Le déterminant de A^*A est la somme des carrés des modules de tous les mineurs d'ordre m de la matrice A, où m est le nombre de colonnes de la matrice A.

521. La solution est analogue à celles des problèmes nºˢ 517, 518. Pour la matrice carrée la question se résout par application du théorème de Laplace et de l'inégalité de Bouniakovsky. Il convient de compléter la matrice rectangulaire jusqu'à obtenir une matrice carrée telle que la somme des produits des éléments de n'importe quelle colonne de la matrice A par les nombres complexes conjugués des éléments de n'importe quelle colonne de la matrice complémentaire soit nulle.

522. Appliquant plusieurs fois de suite le résultat du problème nº 521 à la matrice A et en adoptant en tant que B la matrice formée d'une seule colonne, nous obtenons

$$|A^*A| = \|A\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|^2 \dots \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|^2 \leqslant n^n M^{2n},$$

d'où il découle que

$$\|A\| \leqslant n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

523. Complétons le déterminant donné Δ jusqu'à obtenir le déterminant Δ_1 d'ordre $n + 1$, en le bordant à gauche d'une colonne dont tous les éléments sont égaux à $\frac{M}{2}$ et en haut d'une ligne de zéros. Alors $\Delta = \frac{2}{M} \Delta_1$. Retranchons de toutes les colonnes du déterminant Δ_1 la première colonne. On obtient un déterminant dont tous les éléments ne sont pas supérieurs à $\frac{M}{2}$. L'application du résultat du problème nº 522 donne le résultat qu'il fallait demontrer.

524. La limite $n^{\frac{n}{2}} M^n$ est atteinte, par exemple, pour le module du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \text{ où } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}.$$

525. Construisons une matrice d'ordre $n = 2^m$ de la manière suivante. Construisons d'abord la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, remplaçons chaque élément égal à 1 par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et chaque élément égal à -1 par la matrice $-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous obtenons une matrice du 4ème ordre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opérant de la même manière avec cette matrice, nous obtenons une matrice du 8ème ordre et ainsi de suite.

Il est facile de voir que pour les matrices ainsi construites les sommes des produits des éléments correspondants de deux différentes colonnes sont nulles. Par conséquent,

$$\bar{A}A = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad |\bar{A}A| = n^n, \quad \|A\| = n^{\frac{n}{2}}.$$

Pour la matrice MA on a l'égalité

$$\|MA\| = M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

526. Démontrons que tous les éléments d'une matrice pour laquelle la valeur absolue du déterminant est maximale sont égaux à ± 1. En effet, si $-1 < a_{ik} < 1$, $\Delta \geqslant 0$ et $A_{ik} > 0$, le déterminant croît quand on remplace a_{ik} par 1. Si, au contraire, $\Delta \geqslant 0$ et $A_{ik} < 0$, le déterminant croît quand on remplace a_{ik} par -1. Si $\Delta < 0$, la croissance de la valeur absolue du déterminant aura lieu lors du remplacement de a_{ik} par l'unité avec le signe opposé à celui de A_{ik}. Enfin, si $A_{ik} = 0$, la valeur du déterminant ne sera pas modifiée lors du remplacement de a_{ik} par 1 ou -1. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que tous les éléments de la première ligne et de la première colonne du déterminant maximal sont égaux à 1. Ceci s'obtient en multipliant les lignes et les colonnes par -1. Retranchons maintenant la première ligne du déterminant maximal de toutes les autres. Le déterminant sera ramené à un déterminant d'ordre $n-1$, dont tous les éléments sont égaux à 0 ou -2. Ce déterminant est égal à $2^{n-1}N$, où N est un nombre entier.

527. 4 pour $n = 3$; 48 pour $n = 5$.

528. Pour la matrice singulière A le résultat est trivial. Soient A une matrice non singulière, $\bar{A}$ sa transposée, Δ son déterminant et A' la matrice complémentaire de A. Alors $A' = \Delta C \bar{A}^{-1} C$, où $C = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & +1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}$; cela découle immédiatement de la règle de formation de la matrice inverse. Aussi $|A'| = \Delta^{n-1}$ et $(A')' = \Delta^{n-1} \cdot C(\bar{A}')^{-1} C = \Delta^{n-1} \cdot \Delta^{-1} A = \Delta^{n-2} A$.

529. Supposons que le mineur de la matrice A' complémentaire de la matrice non singulière A est formé des lignes d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ et des colonnes d'indices $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Soient $i_{m+1} < i_{m+2} < \dots < i_n$ les indices des lignes qui n'entrent pas dans le mineur et $k_{m+1} < k_{m+2} < \dots < k_n$ les indices des colonnes qui n'entrent pas dans le mineur. Multiplions

le mineur considéré par le déterminant Δ de la matrice A :

$$\Delta\cdot\begin{vmatrix} \Delta_{i_1k_1} & \dots & \Delta_{i_1k_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{i_mk_1} & \dots & \Delta_{i_mk_m} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+\dots+i_m+k_1+\dots+k_m}\Delta\cdot\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \dots & A_{i_mk_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{i_1k_m} & \dots & A_{i_mk_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \dots & A_{i_mk_1} & A_{i_{m+1}k_1} & \dots & A_{i_nk_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i_1k_m} & \dots & A_{i_mk_m} & A_{i_{m+1}k_m} & \dots & A_{i_nk_m} \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_m} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_mk_1} & \dots & a_{i_mk_m} & \dots & a_{i_mk_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_m} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Delta & & & \\ a_{i_{m+1}k_1} & \dots & a_{i_{m+1}k_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}k_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_{m+1}} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} = \Delta^m\cdot\begin{vmatrix} a_{i_{m+1}k_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_{m+1}} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix}.$$

Il en découle ce qu'il fallait démontrer.

530, 531. Découle directement du théorème sur le déterminant du produit de deux matrices rectangulaires.

532. Il faut établir la numérotation lexicographique des combinaisons, c'est-à-dire estimer que la combinaison $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ précède la combinaison $j_1 < j_2 < \dots < j_m$ si la première différence non nulle dans la série $i_1 - j_1, i_2 - j_2, \dots$ est négative. Dans ce cas, chaque mineur de la matrice triangulaire, dont les indices des colonnes forment une combinaison précédant la combinaison des indices des lignes, est nul.

533. En vertu des résultats des problèmes nos 531, 491, il suffit de démontrer le théorème pour les matrices triangulaires. En vertu du résultat du problème no 532, nous avons pour la matrice triangulaire A :

$$|A'_m| = \prod_{i_1<i_2<\dots<i_m} a_{i_1i_1}a_{i_2i_2}\dots a_{i_mi_m} = |A|^{C_{n-1}^{m-1}}.$$

534. Les propriétés a) et b) découlent immédiatement de la définition. Pour établir la propriété c) il est commode de désigner les éléments du produit kroneckérien en leur associant en qualité d'indices non pas les numéros des couples, mais les couples eux-mêmes. Soit

$$C = (A'\cdot A'')\times(B'\cdot B''),\qquad A'\times B' = G,\qquad A''\times B'' = H.$$

Alors

$$c_{i_1k_1,\,i_2k_2} = \sum_{i=1}^{n} a'_{i_1i}a''_{ii_2}\cdot\sum_{k=1}^{m} b'_{k_1k}b''_{kk_2} =$$

$$= \sum_{i,\,k} a'_{i_1i}b'_{k_1k}a''_{ii_2}b''_{kk_2} = \sum_{i,\,k} g_{i_1k_1,\,ik}h_{ik,\,i_2k_2},$$

d'où $C = G\cdot H$, ce qu'il fallait démontrer.

535. Le déterminant de la matrice $A \times B$ ne dépend pas du procédé de numérotation des couples, étant donné que le changement de numérotation entraîne des permutations semblables des lignes et des colonnes. Ensuite

$$A \times B = (A \times E_m)\cdot(E_n \times B).$$

Pour une numérotation appropriée des couples la matrice $A\times E_m$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$, et la matrice A se répète m fois. Aussi le déterminant de $A\times E_m$ est égal à $|A|^m$. De la même façon (mais pour une autre numérotation de couples), nous trouverons que le déterminant de $E_n\times B$ est égal à $|B|^n$. Par conséquent, $|A\times B|=|A|^m\cdot|B|^n$.

536. L'élément à l'intersection de la ligne d'indice α et de la colonne d'indice β de la matrice C_{ik} est

$$c_{(i-1)m+\alpha,\ (k-1)m+\beta}=\sum_{s=1}^{mn} a_{(i-1)m+\alpha,\ s}b_{s,\ (k-1)m+\beta}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{v=1}^{m} a_{(i-1)m+\alpha,\ (j-1)m+v}b_{(j-1)m+v,\ (k-1)m+\beta}.$$

Mais la somme intérieure dans la dernière expression est l'élément de la matrice $A_{ij}B_{jk}$ situé à l'intersection de la ligne d'indice α et de la colonne d'indice β. Donc

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}.$$

537. Pour $n=1$, le théorème est trivial. Supposons que le théorème est démontré pour la matrice d'« ordre » $n-1$. Dans cette hypothèse, démontrons ce théorème pour les matrices d'« ordre » n.

Considérons d'abord le cas où A_{11} est une matrice non singulière

$$C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Multiplions à droite la matrice C par la matrice D, où

$$D=\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} & \dots & -A_{11}^{-1}A_{1n} \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}.$$

$C'=CD$ prend alors la forme

$$C'=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix},$$

où $A'_{ik}=A_{ik}-A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1k}$.

Toutes les matrices se trouvant dans les cellules des matrices C, D et C' sont commutatives. Il est facile de vérifier que lorsque cette condition est réalisée, le théorème sur le déterminant du produit de deux matrices est également vrai pour les déterminants formels.

La matrice D a E comme déterminant formel, le déterminant véritable de D est égal à 1.

Par conséquent, $|C|=|C'|=|A_{11}|\cdot\begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$, et pour le déterminant formel B nous avons $B=A_{11}\cdot B'$, où B' est le déterminant formel de la matrice

$$\begin{pmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix}.$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence

$$|B'|=\begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$$

et, par conséquent, $|B| = |A_{11}|\cdot|B'| = |C|$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour se libérer de la restriction $|A_{11}| \neq 0$, on peut procéder de la façon suivante. Prenons la matrice

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix} A_{11}+\lambda E_m & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

et désignons son déterminant formel par $B(\lambda)$.

Etant donné que $|A_{11}+\lambda E_m| = \lambda^m + \dots \neq 0$, $|C(\lambda)| = |B(\lambda)|$. Ces deux déterminants sont des polynômes en λ. Comparant leurs termes indépendants de λ, nous obtenons $|C| = |B|$. La démonstration est ainsi terminée.

Chapitre 5

POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES D'UNE VARIABLE

538. a) $2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$;
b) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1$.

539. a) Le quotient est $2x^2 + 3x + 11$, le reste $25x - 5$.
b) Le quotient est $\frac{3x-7}{9}$, le reste $\frac{-26x-2}{9}$.

540. $p = -q^2 - 1,\ m = q$.

541. 1) $q = p - 1,\ m = 0$; 2) $q = 1,\ m = \pm\sqrt{2-p}$.

542. $(-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$.

543. a) $(x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5$;
b) $(x+3)(2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109) - 327$;
c) $(x + 1 + i)[4x^2 - (3 + 4i)x + (-1 + 7i)] + 8 - 6i$;
d) $(x - 1 + 2i)[x^2 - 2ix - 5 - 2i] - 9 + 8i$.

544. a) 136; b) $-1 - 44i$.

545. a) $(x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$;
b) $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x - 1) + 1$;
c) $(x-2)^4 - 18(x-2) + 38$;
d) $(x+i)^4 - 2i(x+i)^3 - (1+i)(x+i)^2 - 5(x+i) + 7 + 5i$;
e) $(x + 1 - 2i)^4 - (x + 1 - 2i)^3 + 2(x + 1 - 2i) + 1$.

546. a) $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{6}{(x-2)^3} + \frac{11}{(x-2)^4} + \frac{7}{(x-2)^5}$;
b) $\frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^5}$.

547. a) $x^4 + 11x^3 + 45x^2 + 81x + 55$;
b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8$.

548. a) $f(2) = 18$, $f'(2) = 48$, $f''(2) = 124$, $f'''(2) = 216$, $f^{\mathrm{IV}}(2) = 240$, $f^{\mathrm{V}}(2) = 120$;
b) $f(1 + 2i) = -12 - 2i$, $f'(1 + 2i) = -16 + 8i$, $f''(1 + 2i) = -8 + 30i$, $f'''(1 + 2i) = 24 + 30i$, $f^{\mathrm{IV}}(1 + 2i) = 24$.

549. a) 3; b) 4.

550. $a = -5$.

551. $A = 3,\ B = -4$.

552. $A = n,\ B = -(n + 1)$.

555. Pour que $f(x)$ soit divisible par $(x-1)^{k+1}$, il faut et il suffit que $f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$ et que $f'(x)$ soit divisible par $(x-1)^k$;

or, pour cela, quand la condition $f(1) = 0$ est vérifiée, il faut et il suffit que $f_1(x) = nf(x) - xf'(x)$ soit divisible par $(x-1)^k$. Considérant $f_1(x)$ formellement comme un polynôme de degré n nous répéterons ce raisonnement k fois.

556. a est un zéro d'ordre de multiplicité $(k+3)$, où k est l'ordre de multiplicité de a en tant que zéro de $f'''(x)$.

557. $3125b^2 + 108a^5 = 0$, $a \neq 0$.

558. $b = 9a^2$, $1728a^5 + c^2 = 0$.

559. La dérivée $x^{n-m-1}[nx^m + (n-m)a]$ n'a pas de zéros multiples, sauf 0.

560. Posant le plus grand commun diviseur de m et n égal à d, $m = dm_1$, $n = dn_1$, nous obtenons la condition sous la forme

$$(-1)^{n_1}(n_1-m_1)^{n_1-m_1}m_1^{m_1}a^{n_1} = b^{m_1}n_1^{n_1}.$$

562. Le zéro d'ordre de multiplicité $(k-1)$ différent du nombre zéro du polynôme

$$a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \ldots + a_kx^{p_k}$$

vérifie les équations:

$$\begin{aligned}
a_1x^{p_1} + a_2x^{p_2} + \ldots + a_kx^{p_k} &= 0,\\
p_1a_1x^{p_1} + p_2a_2x^{p_2} + \ldots + p_ka_kx^{p_k} &= 0,\\
p_1^2a_1x^{p_1} + p_2^2a_2x^{p_2} + \ldots + p_k^2a_kx^{p_k} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
p_1^{k-2}a_1x^{p_1} + p_2^{k-2}a_2x^{p_2} + \ldots + p_k^{k-2}a_kx^{p_k} &= 0,
\end{aligned}$$

d'où il découle que les nombres $a_1x^{p_1}$, $a_2x^{p_2}$, ..., $a_kx^{p_k}$ sont proportionnels aux cofacteurs des éléments de la dernière ligne du déterminant de Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1^{k-1} & p_2^{k-1} & p_3^{k-1} & \ldots & p_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{\Delta}{\Delta_i} = \prod_{s \neq i}(p_i - p_s) = \varphi'(p_i).$$

Il en découle que les nombres $a_ix^{p_i}$ sont inversement proportionnels à $\varphi'(p_i)$. c'est-à-dire

$$a_1x^{p_1}\varphi'(p_1) = a_2x^{p_2}\varphi'(p_2) = \ldots = a_kx^{p_k}\varphi'(p_k).$$

Tous les raisonnements rapportés sont inversibles.

563. Si $f(x)$ est divisible par $f'(x)$, le quotient est un polynôme du premier degré avec comme coefficient du terme principal $\frac{1}{n}$, où n est le degré de $f(x)$. C'est pourquoi $nf(x) = (x - x_0)f'(x)$. La dérivation donne $(n-1)f'(x) = (x - x_0)f''(x)$, etc., d'où

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x) = a_0(x-x_0)^n.$$

L'inverse est évident.

564. Le zéro multiple du polynôme $f(x)=1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ doit être aussi un zéro de sa dérivée

$$f'(x)=1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}.$$

Par conséquent, si $f(x_0)=f'(x_0)=0$, alors $x_0=0$, mais 0 n'est pas un zéro de $f(x)$.

565. Si $f(x)=(x-x_0)^k f_1(x)$, où $f_1(x)$ est une fonction rationnelle ne s'annulant pas pour $x=x_0$, la dérivation immédiate donne:

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0, \quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

Inversement, si $f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0$ et $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, alors $f(x)=(x-x_0)^k f_1(x)$, $f_1(x_0)\neq 0$, car si $f(x)=(x-x_0)^m q(x)$, $q(x_0)\neq 0$, quand $m\neq k$, la suite de dérivées successives s'annulant pour $x=x_0$ serait soit plus courte, soit plus longue.

566. La fonction

$$g(x)=\frac{\psi(x)}{w(x)}=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

vérifie la condition

$$g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0.$$

Par conséquent, $\psi(x)=(x-x_0)^{n+1}F(x)$, où $F(x)$ est un polynôme, ce qu'il fallait démontrer.

567. Si $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$ n'est pas identiquement nul, on peut supposer que $f_1(x_0)\neq 0$. Considérons la fonction rationnelle $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}-\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$. Elle n'est pas identiquement nulle et admet x_0 comme zéro. L'ordre de multiplicité de ce zéro est d'une unité supérieur à l'ordre de multiplicité de x_0 comme zéro de la dérivée égale à $\frac{f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)}{[f_1(x)]^2}$, d'où il découle immédiatement la validité de l'affirmation du problème.

568. Soit x_0 le zéro d'ordre de multiplicité k de $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$. Alors $f(x_0)\neq 0$, car autrement x_0 serait le zéro commun de $f(x)$ et $f'(x)$. D'après le problème précédent x_0 est un zéro d'ordre de multiplicité $k+1$ pour le polynôme $f(x)f'(x_0)-f(x_0)f'(x)$ dont le degré n'est pas supérieur à n. Par conséquent, $k+1\leqslant n$, $k\leqslant n-1$.

569. Le polynôme $f(x)f'(x_0)-f(x_0)f'(x)$ doit avoir x_0 comme zéro d'ordre de multiplicité n, c'est-à-dire qu'il doit être égal à $A(x-x_0)^n$, où A est une constante. Le développement suivant les puissances de $x-x_0$ après la substitution $x-x_0=z$ donne

$$(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n)a_1-(a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots$$
$$\ldots+na_nz^{n-1})a_0=Az^n,$$

et

$$a_0=f(x_0)\neq 0.$$

D'où $a_2=\frac{a_1^2}{2a_0}$, $a_3=\frac{a_1^3}{a_0^2 3!}$, $\ldots$, $a_n=\frac{a_1^n}{a_0^{n-1}n!}$. Remplaçant $\frac{a_1}{a_0}$ par α, nous obtenons

$$f(x)=a_0\left[1+\frac{\alpha(x-x_0)}{1}+\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\alpha^n(x-x_0)^n}{n!}\right].$$

570. Par exemple, $\delta=\frac{1}{21}$ $\left(\frac{1}{20}\text{ ne convient déjà pas}\right)$.

571. Par exemple, $\delta=\frac{1}{25}$ $\left(\frac{1}{24}\right.$ ne convient déjà pas$\left.\right)$.

572. Par exemple, $M=6$.

573. Par exemple, a) $x=\rho i,\ 0<\rho<\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$; b) $x=\rho,\ 0<\rho<\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

574. Par exemple,

a) $x=1-\rho,\ 0<\rho<\frac{1}{8}$;

b) $x=1+\rho\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{4}\right),\quad \rho<\sqrt[4]{8}$;

c) $x=1+\rho i,\ \rho<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

575. Le développement du polynôme $f(z)$ suivant les puissances de $z-i=h$ donne

$$f(z)=(2-i)\left[1+(1-i)h^3-\frac{4+2i}{5}h^4+\frac{1+3i}{5}h^5\right].$$

Posant $h=a(1-i)$, nous obtenons

$$f(z)=(2-i)\left[1-4a^3+4a^3\left(\frac{4+2i}{5}a-\frac{4+2i}{5}a^2\right)\right],$$

d'où

$$|f(z)|\leqslant\sqrt{5}\left(|1-4a^3|+4a^3\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}\right)<\sqrt{5}$$

pour $0<a<\frac{1}{2}$.

576. Après avoir représenté le polynôme sous la forme

$$f(z)=f(z_0)\{1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(z-z_0)^k[1+(z-z_0)\psi(z)]\},$$

poser $z-z_0=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, prendre $\theta=\frac{2m\pi-\varphi}{k}$ et choisir ρ suffisamment petit pour que $|(z-z_0)\psi(z)|<1$. Alors $|f(z)|=|f(z_0)|\,|1+r\rho^k+r\rho^k(z-z_0)\psi(z)|>f(z_0)$.

577. Se démontre comme pour le polynôme en utilisant la formule de Taylor pour une fonction rationnelle (problème n° 566) qu'il faut arrêter après le premier terme dont le coefficient est non nul, sans compter $f(x_0)$.

578. Désignons par M la borne inférieure de $|f(z)|$ lors de la variation de z dans le domaine considéré.

En divisant le domaine en plusieurs parties nous démontrerons l'existence d'un point z_0 dans un voisinage arbitraire duquel la borne inférieure de $|f(z)|$ est égale à M. En cas de nécessité nous réduirons dans la mesure du possible la fraction par $z-z_0$. Soit $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ après cette réduction. Alors $\psi(z_0)\neq 0$, car dans le cas contraire, dans un voisinage suffisamment petit de z_0, $|f(z)|$ serait aussi grand que l'on veut et la borne inférieure de $|f(z)|$ ne pourrait être égale à M. Par conséquent, $f(z)$ est continue quand $z=z_0$, et en vertu de sa continuité $|f(z_0)|=M$, ce qu'il fallait démontrer.

579. Le lemme sur la croissance du module fait défaut.

580. Avec l'hypothèse adoptée

$$f(a)\neq 0,\qquad f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0,\qquad f^{(k)}(a)\neq 0$$

et d'après la formule de Taylor

$$f(z)=f(a)+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k[1+\varphi(z)],\quad \varphi(a)=0.$$

Posons

$$\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\qquad z-a=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Choisissons ρ suffisamment petit pour que $|\varphi(z)|<1$, $r\rho^k<1$. Alors $|f(z)|=$ $=|f(a)|\cdot|1+r\rho^k[\cos(\varphi+k\theta)+i\sin(\varphi+k\theta)]+r\rho^k\lambda|$, où $|\lambda|<1$.

Pour $\theta=\frac{(2m-1)\pi-\varphi}{k}$, $m=1, 2, \ldots, k$, $|f(z)|<|f(a)|$.

Pour $\theta=\frac{2m\pi-\varphi}{k}$, $m=1, 2, \ldots, k$, $|f(z)|>|f(a)|$.

Ainsi, lors de la variation de θ de $\frac{\pi-\varphi}{k}$ à $\frac{\pi-\varphi}{k}+2\pi$ la fonction $|f(z)|-$ $-|f(a)|$ change de signe $2k$ fois. Par suite de la continuité de $|f(z)|-|f(a)|$ comme fonction de θ, $|f(z)|-|f(a)|$ s'annule $2k$ fois, ce qu'il fallait démontrer.

581. Comme dans le problème précédent, montrons que $\operatorname{Re}(f(z))-$ $-\operatorname{Re}(f(a))$ et $\operatorname{Im}(f(z))-\operatorname{Im}(f(a))$ quand $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ change de signe $2k$ fois pour une variation de θ de 2π si seulement ρ est suffisamment petit. D'après la formule de Taylor, posant $\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, nous obtenons $f(z)-f(a)=r\rho^k[\cos(\varphi+k\theta)+i\sin(\varphi+k\theta)][1+$ $+\varphi(z)]$, $\varphi(a)=0$.

Choisissant ρ tel que $|\varphi(z)|<1$ nous obtenons, posant $\varphi(z)=\varphi_1(z)+$ $+i\varphi_2(z)$:

$$\operatorname{Re}(f(z))-\operatorname{Re}(f(a))=r\rho^k[\cos(\varphi+k\theta)(1+\varphi_1(z))-\sin(\varphi+k\theta)\varphi_2(z)];$$

$$\operatorname{Im}(f(z))-\operatorname{Im}(f(a))=r\rho^k[\sin(\varphi+k\theta)(1+\varphi_1(z))+\cos(\varphi+k\theta)\varphi_2(z)].$$

Posant $\varphi+k\theta=m\pi$, $m=0, 1, 2, \ldots, 2k$ nous obtenons

$$\operatorname{Re}(f(z))-\operatorname{Re}(f(a))=r\rho^k(-1)^m(1+\varepsilon_m),$$

où ε_m est la valeur correspondante de $\varphi_1(z)$, $|\varepsilon_m|<1$.

Il en résulte que $\operatorname{Re}(f(z))-\operatorname{Re}(f(a))$ change de signe $2m$ fois lorsque z parcourt la circonférence $|z-a|=\rho$. Un résultat analogue sera obtenu pour $\operatorname{Im}(f(z))-\operatorname{Im}(f(a))$, en posant $\varphi+k\theta=\frac{\pi}{2}+m\pi$, $m=0, 1, \ldots, 2k$.

582. a) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$;

c) $$\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right);$$

d) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

583. a) $2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$;

b) $2\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{\sin\left(\theta+\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)$; c) $\prod_{k=1}^{m}\left(x-\operatorname{tg}^2\frac{(2k-1)\pi}{4m}\right)$

584. a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$;

b) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$;

c) $\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\times$

$\times\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$;

d) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\sqrt[2n]{2}\,x\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n}+\sqrt[n]{2}\right)$;

e) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$;

f) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n}+1\right)$.

585. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)=$
$=x^5-(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+$
$+(23+17i)x-(6+6i)$;

b) $(x+1)^3(x-3)(x-4)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$;

c) $(x-i)^2(x+1+i)=x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-1-i$.

586. $\prod_{k=1}^{n}X_k(x)$.

587. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)=x^6-9x^5+33x^4-$
$-65x^3+74x^2-46x+12$;

b) $(x^2-4x+13)^3=x^6-12x^5+87x^4-376x^3+1131x^2-2028x+$
$+2197$;

c) $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)=x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$.

588. a) $(x-1)^3(x+2)$; b) $(x+1)^2(x^2+1)$; c) $(x-1)$.

589. x^d-1, où d est le plus grand commun diviseur de m et n.

590. x^d+a^d si les nombres $\frac{m}{d}$ et $\frac{n}{d}$ sont impairs; 1 si au moins un de ces nombres est pair; d désigne le plus grand commun diviseur de m et n.

591. a) $(x-1)^2(x+1)$; b) $(x-1)^3(x+1)$;

c) x^d-1 (d est le PGCD de m et n).

592. Posons $\lambda_0=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ et décomposons $f(x)$ en facteurs linéaires: $f(x)=$ $=(x-\lambda_0)(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_{k-1})$. Alors $\lambda_j\neq\lambda_0$ quand $j\neq 0$. Ensuite,

$$f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{1}{[v(x)]^k}(u(x)-\lambda_0v(x))\ldots(u(x)-\lambda_{k-1}v(x)).$$

En vertu des conditions du problème et de ce que $u(x_0) - \lambda_j v(x_0) = v(x_0)(\lambda_0 - \lambda_j) \neq 0$, le polynôme $u(x) - \lambda_0 v(x)$ admet x_0 comme zéro d'ordre de multiplicité $k > 1$. Par conséquent, $u'(x) - \lambda_0 v'(x)$ admet x_0 comme zéro d'ordre de multiplicité $k - 1$. Ensuite,

$$f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right) = \frac{1}{[v'(x)]^k}(u'(x) - \lambda_0 v'(x)) \ldots (u'(x) - \lambda_{k-1} v'(x)).$$

Les $u'(x) - \lambda_j v'(x)$, $j \neq 0$, ne s'annulent évidemment pas tous quand $x = x_0$. Par conséquent, $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)$ admet x_0 comme zéro d'ordre de multiplicité $k - 1$, ce qu'il fallait démontrer.

593. Si w est un zéro du polynôme $x^2 + x + 1$, alors $w^3 = 1$. Par conséquent, $w^{3m} + w^{3n+1} + w^{3p+2} = 1 + w + w^2 = 0$.

594. Le zéro λ du polynôme $x^2 - x + 1$ vérifie l'équation $\lambda^3 = -1$. Par conséquent,

$$\lambda^{3m} - \lambda^{3n+1} + \lambda^{3p+2} = (-1)^m - (-1)^n \lambda + (-1)^p \lambda^2 = $$
$$= (-1)^m - (-1)^p + \lambda[(-1)^p - (-1)^n].$$

La dernière expression ne peut être nulle que si $(-1)^m = (-1)^p = (-1)^n$, c'est-à-dire si les nombres m, n, p sont simultanément pairs ou impairs.

595. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Ces facteurs sont premiers entre eux, $x^2 + x + 1$ est toujours diviseur de $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ (problème nº 593). Il reste à éclaircir pour quelles conditions a lieu la divisibilité par $x^2 - x + 1$. La substitution du zéro λ de ce polynôme donne

$$(-1)^m + (-1)^n \lambda + (-1)^p \lambda^2 = (-1)^m - (-1)^p + \lambda[(-1)^n + (-1)^p].$$

Le résultat est 0 si, et seulement si, $(-1)^m = (-1)^p = -(-1)^n$, c'est-à-dire si les nombres m, p et $n + 1$ sont simultanément pairs ou impairs.

596. Si m n'est pas divisible par 3.

597. Tous les zéros du polynôme $x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$ sont des racines $k$ème de l'unité. Par conséquent,

$$\xi^{ka_1} + \xi^{ka_2+1} + \ldots + \xi^{ka_k+k-1} = 1 + \xi + \ldots + \xi^{k-1} = 0.$$

Il en découle la divisibilité, puisque tous les zéros de $x^{k-1} + \ldots + 1$ sont simples.

598. La substitution du zéro w du polynôme $x^2 + x + 1$ dans $f(x) = (1 + x)^m - x^m - 1$ donne $(1 + w)^m - w^m - 1$. Mais $1 + w = -w^2 = \lambda$ est une racine primitive 6ème de 1. Ensuite, $w = \lambda^2$, d'où $f(w) = \lambda^m - \lambda^{2m} - 1$.

Quand

$m = 6n$	$f(w) = -1 \neq 0;$
$m = 6n + 1$	$f(w) = \lambda - \lambda^2 - 1 = 0;$
$m = 6n + 2$	$f(w) = \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0;$
$m = 6n + 3$	$f(w) = -3 \neq 0;$
$m = 6n + 4$	$f(w) = -\lambda + \lambda^2 - 1 \neq 0;$
$m = 6n + 5$	$f(w) = -\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$

La divisibilité de $f(x)$ par $x^2 + x + 1$ a lieu pour $m = 6n + 1$ et $m = 6n + 5$.

599. Pour $m = 6n + 2$ et $m = 6n + 4$.

600. $f(w) = m(1 + w)^{m-1} - mw^{m-1} = m[\lambda^{m-1} - \lambda^{2(m-1)}]$, $f'(w) = 0$ seulement pour $m = 6n + 1$.

601. Pour $m = 6n + 4$.

602. Non, car les deux premières dérivées ne s'annulent pas simultanément.

603. Pour $x = k$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$f(k) = 1 - \frac{k}{1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} - \ldots + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots k} = (1-1)^k = 0.$$

Par conséquent, le polynôme est divisible par $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$. La comparaison des coefficients des termes principaux donne

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

604. Pour les m réciproquement premiers avec n.

605. Si $f(x^n)$ est divisible par $x-1$, alors $f(1) = 0$ et, par conséquent, $f(x)$ est divisible par $x-1$, d'où il découle que $f(x^n)$ est divisible par $x^n - 1$.

606. Si $F(x) = f(x^n)$ est divisible par $(x-a)^k$, alors $F'(x) = f'(x^n) \times nx^{n-1}$ est divisible par $(x-a)^{k-1}$, d'où il découle que $f'(x^n)$ est divisible par $(x-a)^{k-1}$. De même $f''(x^n)$ est divisible par $(x-a)^{k-2}$, ..., $f^{(k-1)}(x^n)$ est divisible par $x-a$. D'où nous concluons que $f(a^n) = f'(a^n) = \ldots = f^{(k-1)}(a^n) = 0$ et, par conséquent, $f(x)$ est divisible par $(x-a^n)^k$, $f(x^n)$ est divisible par $(x^n - a^n)^k$.

607. Si $F(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ est divisible par $x^2 + x + 1$, alors $F(w) = f_1(1) + wf_2(1) = 0$ (w est un zéro de $x^2 + x + 1$) et $F(w^2) = f_1(1) + w^2 f_2(1) = 0$, d'où $f_1(1) = 0$, $f_2(1) = 0$.

608. Le polynôme $f(x)$ n'a pas de zéros réels d'ordre de multiplicité impair, sinon il aurait changé de signe. Par conséquent, $f(x) = [f_1(x)]^2 f_2(x)$, où $f_2(x)$ est un polynôme qui ne possède pas de zéros réels. Partageons les zéros complexes du polynôme f_2 en deux groupes en classant les zéros complexes conjugués dans différents groupes. Les produits des facteurs linéaires correspondant aux zéros de chaque groupe forment des polynômes à coefficients conjugués $\psi_1(x) + i\psi_2(x)$ et $\psi_1(x) - i\psi_2(x)$. Par conséquent,

$$f_2(x) = \psi_1^2(x) + \psi_2^2(x) \quad \text{et} \quad f(x) = (f_1\psi_1)^2 + (f_1\psi_2)^2.$$

609. a) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$;

c) $x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a$; d) $bx_1, bx_2, \ldots, bx_n$.

610. L'une des racines doit être égale à $-\frac{p}{2}$. La relation recherchée est $8r = 4pq - p^3$.

611. $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

612. $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

613. Pour tout α la relation entre les racines est conservée. Prenant $\alpha = -\frac{a}{4}$ nous obtenons pour l'équation transformée $y^4 + a'y^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0$, $a' = 0$, $a'^3 - 4a'b' + 8c' = 0$, d'où $c' = 0$.

614. $a^2 d = c^2$.

615. La division par x^2 donne $x^2 + \frac{d}{x^2} + a\left(x + \frac{c}{ax}\right) + b = 0$. Posant $x + \frac{c}{ax} = z$, nous obtenons $x^2 + \frac{d}{x^2} = x^2 + \frac{c}{a^2x^2} = z^2 - 2\frac{c}{a}$, d'où nous tirons pour z l'équation du second degré $z^2 + az + b - 2\frac{c}{a} = 0$. Après avoir déterminé z, nous trouvons facilement x (équations récurrentes généralisées).

616. a) $x = 1 \pm \sqrt{3}$, $1 \pm i\sqrt{2}$; b) $x = 1 \pm 2i$, $-2 \pm i$;

c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$; d) $x = 1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

617. $\lambda = \pm 6$.

618. 1) $b = c = 0$, a quelconque; 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$.

619. 1) $a = b = c = 0$; 2) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$; 3) $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$; 4) $b = \lambda$, $a = -\frac{1}{\lambda}$, $c = \frac{2-\lambda^2}{\lambda}$, où $\lambda^3 - 2\lambda + 2 = 0$.

620. $\lambda = -3$.

621. $q^3 + pq + q = 0$. 622. $a_1^2 - 2a_2$.

623. $x_i = -\frac{a_1}{n} + \frac{2i-n-1}{2} h$, $i = 1, 2, \ldots, n$, où

$$h = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{12(n-1)a_1^2 - 24na_2}{n^2-1}}.$$

624. Si les racines avaient formé une progression arithmétique, alors, en vertu de la formule du problème précédent, elles auraient été égales à:

a) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; elles vérifient véritablement l'équation;

b) $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; elles ne vérifient pas l'équation.

625. Soit $y = Ax + B$ l'équation de la droite recherchée. Alors les racines de l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = Ax + B$ forment une progression arithmétique. Trouvons-les conformément au problème nº 623:

$$x_i = -\frac{a}{4} + \frac{2i-5}{2} h, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

où

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9a^2-24b}{15}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3a^2-8b}{5}}.$$

D'où

$$A - c = x_1x_4(x_2+x_3) + x_2x_3(x_1+x_4) =$$

$$= -\left(\frac{a^2}{16} - \frac{9}{4}h^2\right)\frac{a}{2} - \left(\frac{a^2}{16} - \frac{1}{4}h^2\right)\frac{a}{2} = \frac{a^3-4ab}{8},$$

$$d - B = x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{1600}(36b - 11a^2)(4b + a^2).$$

Par conséquent,

$$A = \frac{a^3-4ab+8c}{8}, \quad B = d - \frac{1}{1600}(36b - 11a^2)(4b + a^2).$$

Les points d'intersection seront réels et non confondus si $3a^2 - 8b > 0$, c'est-à-dire si la dérivée seconde $2(6x^2 + 3ax + b)$ change de signe lors de la variation de x le long de l'axe réel.

626. $x^4 - ax^2 + 1 = 0$, où $a = \frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}$.

627. $(x^2 - x + 1)^3 - a(x^2 - x)^2 = 0$, $a = \frac{(\alpha^2-\alpha+1)^3}{(\alpha^2-\alpha)^2}$.

628. $f'(x_i)=(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)$;

$f''(x_i)=2[(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)+$
$+(x_i-x_1)(x_i-x_3)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)+\dots$
$\dots+(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots$

$$\dots(x_i-x_{n-1})]=2f'(x_i)\sum_{\substack{s=1\\(s\neq i)}}^{n}\frac{1}{x_i-x_s}\qquad (\text{si } x_s\neq x_i).$$

629. Découle immédiatement du problème n° 628.

630. Soit $x_i=x_1+(i-1)h$. Alors

$$f'(x_i)=(-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!\,h^{n-1}.$$

631. a) $x+1$; b) x^2+1; c) x^3+1; d) x^2-2x+2;
e) x^3-x+1; f) $x+3$; g) x^2+x+1; h) $x^2-2x\sqrt{2}-1$;
i) $x+2$; j) 1; k) $2x^2+x-1$; l) x^2+x+1.

632. a) $(-x-1)f_1(x)+(x+2)f_2(x)=x^2-2$;
b) $-f_1(x)+(x+1)f_2(x)=x^3+1$;
c) $(3-x)f_1(x)+(x^2-4x+4)f_2(x)=x^2+5$;
d) $(1-x^2)f_1(x)+(x^3+2x^2-x-1)f_2(x)=x^3+2$;
e) $(-x^2+x+1)f_1(x)+(x^3+2x^2-5x-4)f_2(x)=3x+2$;
f) $-\dfrac{x-1}{3}f_1(x)+\dfrac{2x^2-2x-3}{3}f_2(x)=x-1$.

633. a) $M_2(x)=x,\quad M_1(x)=-3x^2-x+1$;
b) $M_2(x)=-x-1,\quad M_1(x)=x^3+x^2-3x-2$;
c) $M_2(x)=\dfrac{-x^2+3}{2},\quad M_1(x)=\dfrac{x^4-2x^2-2}{2}$;
d) $M_2(x)=-\dfrac{2x^2+3x}{6},\quad M_1(x)=\dfrac{2x^3+5x^2-6}{6}$;
e) $M_2(x)=3x^2+x-1,\quad M_1(x)=-3x^3+2x^2+x-2$;
f) $M_2(x)=-x^3-3x^2-4x-2,\quad M_1(x)=x^4+6x^3+14x^2+15x+7$.

634. a) $M_2(x)=\dfrac{-16x^2+37x+26}{3},\quad M_1(x)=\dfrac{-16x^3-53x^2-37x-23}{3}$;
b) $M_2(x)=4-3x,\quad M_1(x)=1+2x+3x^2$;
c) $M_2(x)=35-84x+70x^2-20x^3,\quad M_1(x)=1+4x+10x^2+20x^3$.

635. a) $M_1(x)=9x^2-26x-21,\quad M_2(x)=-9x^3+44x^2-39x-7$;
b) $M_1(x)=3x^3+3x^2-7x+2,\quad M_2(x)=-3x^3-6x^2+x+2$.

636. a) $4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$;
b) $-5x^7+13x^6+27x^5-130x^4+75x^3+266x^2-440x+197$.

637. $N(x)=1+\dfrac{n}{1}x+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\dots+\dfrac{n(n+1)\dots(n+m-2)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}x^{m-1}$;

$$M(x)=1+\frac{m}{1}(1-x)+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}(1-x)^2+\dots$$

$$\dots+\frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{1\cdot 2\dots(n-1)}(1-x)^{n-1}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{(n-1)!}-\frac{m}{1}\,\frac{(m+2)\dots(m+n-1)}{(n-2)!}x+$$

$$+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\,\frac{(m+3)\dots(m+n-1)}{(n-3)!}\,x^2-\dots$$

$$\dots+(-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{(n-1)!}\,x^{n-1}.$$

638. 1.

639. a) $(x+1)^4(x-2)^2$; b) $(x+1)^4(x-4)$;
c) $(x-1)^3(x+3)^2(x-3)$; d) $(x-2)(x^2-2x+2)^2$;
e) $(x^3-x^2-x-2)^2$; f) $(x^2+1)^2(x-1)^3$;
g) $(x^4+x^3+2x^2+x+1)^2$.

640. a) $f(x)=x+1+\frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $f(x)=-x^4+4x^3-x^2-7x+5$;

c) $f(x)=1+\frac{2}{5}(x-1)-\frac{1}{105}(x-1)(4x-9)+\frac{1}{945}(x-1)(4x-9)(x-4)$,

$$f(2)=1\,\frac{389}{945}=1,4116\dots\ (\sqrt{2}=1,4142\dots);$$

d) $f(x)=x^3-9x^2+21x-8$.

641. a) $y=-\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)+$

$$+\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)-2(x-1)(x-2)(x-4)+$$

$$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)=-\frac{4}{3}x^3+10x^2-\frac{65}{3}x+15;$$

b) $y=\frac{1}{2}[5-(1-i)x-x^2-(1+i)x^3]$.

642. $f(x)=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k.$

S o l u t i o n.

$$f(x)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(x^n-1)}{(x-\varepsilon_s)\,n\varepsilon_s^{n-1}}=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(1-x^n)}{1-x\varepsilon_s^{-1}}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(s+1)x^k\varepsilon_1^{-ks}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\,\varepsilon_1^{-ks}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\,\varepsilon_k^{-s}=\frac{n+1}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{1-\varepsilon_k^{-1}}=$$

$$=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k.$$

643. $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(x^n-1)}{(x-\varepsilon_k)\,n\varepsilon_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(1-x^n)}{1-x\varepsilon_k^{-1}},\qquad f(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k.$

644. Posons $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Soit $f(x)$ un polynôme quelconque de degré non supérieur à $(n-1)$ et soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ses valeurs pour $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alors

$$f(x_0)=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\varphi(x_0)}{\varphi'(x_i)(x_0-x_i)}.$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant arbitraires, on a

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_k)(x_0-x_k)}=\frac{1}{n}.$$

Considérons le polynôme

$$F(x)=n[\varphi(x_0)-\varphi(x)]-(x_0-x)\varphi'(x).$$

Son degré est inférieur à n et il s'annule quand $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. Par conséquent, $F(x)=0$. Développons $\varphi(x)$ suivant les puissances de $(x-x_0)$:

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k.$$

Nous avons $\sum_{k=1}^{n}(n-k)c_k(x-x_0)^k=0$. Par conséquent, $c_1=c_2=\ldots=c_{n-1}=0$;

$$\varphi(x)=(x-x_0)^n+c_0,\quad x_i=x_0+\sqrt[n]{-c_0}.$$

645. $x^s=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. La comparaison des coefficients de x^{n-1} donne

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}=0.$$

646. $x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. La comparaison des coefficients de x^{n-1} donne

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}=1.$$

647. $a_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\Delta_{ki}$, où $\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$, Δ_{ki} est le cofacteur de l'élément de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $(i+1)^{\text{ème}}$ colonne du déterminant Δ.

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{ki}x^i=\sum_{k=1}^{n}y_k\frac{\Delta_k}{\Delta},$$

où Δ_k est le déterminant qui s'obtient de Δ en remplaçant les éléments de la $k^{\text{ème}}$ ligne par $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

Le calcul des déterminants Δ_k et Δ en tant que déterminants de Vandermonde donne:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta}=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}=\frac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)},$$

où $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. D'où $f(x)=\sum\frac{y_k\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$, ce qu'il fallait démontrer.

648. $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

649. $f(x)=1+\frac{(a-1)x}{1}+\frac{(a-1)^2x(x-1)}{1\cdot 2}+\ldots$

$$\ldots+\frac{(a-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

650. $f(x)=1-\frac{2x}{1}+\frac{2x(2x-2)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{2x(2x-2)\ldots(2x-4n+2)}{(2n)!}$.

651. $f(x)=1-\frac{x-1}{2!}+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}=\frac{n!-(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{n!\,x}.$$

652. $f(x)=\frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\varphi(a)(x-a)}$, où $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

653. Cherchons $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=A_0+A_1\frac{x-m}{1}+A_2\frac{(x-m)(x-m-1)}{1\cdot 2}+\ldots$$

$$\ldots+A_n\frac{(x-m)(x-m-1)\ldots(x-m-n+1)}{n!},$$

où $m, m+1, \ldots, m+n$ sont les valeurs entières de x pour lesquelles par hypothèse $f(x)$ admet des valeurs entières.

Posant $x=m, m+1, \ldots, m+n$, nous obtenons des égalités servant à déterminer $A_0, A_1, \ldots, A_n$:

$$A_0=f(m),$$

$$A_k=f(m+k)-A_0-\frac{k}{1}A_1-\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}A_2-\ldots-kA_{k-1},$$

$$k=1, 2, \ldots, n,$$

d'où il découle que tous les coefficients A_k sont entiers. Pour des valeurs entières de x, tous les termes de $f(x)$ se transforment en coefficients binomiaux avec des facteurs entiers A_k et c'est pourquoi ils représentent des nombres entiers. Par conséquent, $f(x)$ admet des valeurs entières pour des valeurs entières de x, ce qu'il fallait démontrer.

654. Le polynôme $F(x)=f(x^2)$ de degré $2n$ prend des valeurs entières pour $2n+1$ valeurs de $x=-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$ et, en vertu du problème précédent, admet des valeurs entières pour toutes les valeurs entières de x.

655. a) $\frac{1}{12(x-1)}-\frac{4}{3(x+2)}+\frac{9}{4(x+3)}$;

b) $-\frac{1}{6(x-1)}+\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{1}{6(x-4)}$;

c) $\frac{2}{x-1}+\frac{-2+i}{2(x-i)}+\frac{-2-i}{2(x+i)}$;

d) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{i}{4(x-i)}+\frac{i}{4(x+i)}$;

e) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right)$, $\quad \varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

f) $-\frac{1}{16}\left(\frac{1+i}{x-1-i}+\frac{1-i}{x-1+i}+\frac{-1+i}{x+1-i}+\frac{-1-i}{x+1+i}\right)$;

g) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$, $\quad \varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

h) $-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{x-\eta_k}$, $\quad \eta_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}$;

i) $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; $\qquad$ j) $\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^{n-k}C_{2n}^{n+k}}{x-k}$;

k) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}$.

656. a) $\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$;

b) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$;

c) $\frac{1}{8}\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{8}\frac{x-2}{x^2-2x+2}$;

d) $\frac{1}{18}\left(\frac{1}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{2}{x^2+3}\right)$;

e) $\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x-1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}-\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right]$;

f) $\frac{(-1)^m}{2n+1}\left[\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right]$;

g) $\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x\cos\frac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}\right]$;

h) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}-x\cos\frac{(2k-1)(2m+1)\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1}$;

i) $\frac{1}{(n!)^2x}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^kx}{(n+k)!\,(n-k)!\,(x^2+k^2)}$.

657. a) $\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}$;

b) $\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}$;

c) $\frac{3}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}$;

d) $\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k^2}{(x-\varepsilon_k)^2}-(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}\right]$, $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

e) $\frac{1}{x^m}+\frac{\frac{n}{1}}{x^{m-1}}+\frac{\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}}{x^{m-2}}+\ldots+\frac{\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}}{x}+$

$+\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{\frac{m}{1}}{(1-x)^{n-1}}+\frac{\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}}{(1-x)^{n-2}}+\ldots$

$\ldots+\frac{\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}}{1-x}$;

f) $\frac{1}{(-4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}\times$

$\times\left[\frac{1}{(a-x)^{n-k}}+\frac{1}{(a+x)^{n-k}}\right]$;

g) $\frac{1}{(4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}\times$

$\times\left[\frac{1}{(a-ix)^{n-k}}+\frac{1}{(a+ix)^{n-k}}\right]$;

h) $\sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{[f'(x_k)]^2(x-x_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{g'(x_k)f'(x_k)-g(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^3(x-x_k)}$.

658. a) $-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}$;

b) $-\frac{1}{x}+\frac{7}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$;

c) $\frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}+$

$+\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2}$;

d) $\frac{1}{4n^2}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\mp 1}{(x+1)^2}-\frac{2n-1}{x-1}+\frac{2n-1}{x+1}\right]+$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{n}\left(1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-\sin^2\frac{k\pi}{n}-\left(n-\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}.$$

659. a) $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; b) $\frac{x\varphi'(x)-n\varphi(x)}{\varphi(x)}$; c) $\frac{[\varphi'(x)]^2-\varphi(x)\varphi''(x)}{[\varphi(x)]^2}$.

660. a) 9; b) $-\frac{\varphi'(2)}{\varphi(2)}+\frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}=-\frac{17}{5}$; c) 17.

661. $0{,}51x+2{,}04$. 662. $y=\frac{1}{7}[0{,}55x^2+2{,}35x+6{,}98]$.

663. Substituant $\frac{p}{q}$ dans $f(x)$, nous obtenons après avoir multiplié par q^n

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0,$$

d'où

$$\frac{a_0p^n}{q}=-(a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}),$$

$$\frac{a_nq^n}{p}=-(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\ldots+a_{n-1}q^{n-1}).$$

Les seconds membres des dernières égalités contiennent des nombres entiers. Les nombres p et q sont premiers entre eux. Par conséquent, a_0 est divisible par q et a_n par p.

Développons maintenant $f(x)$ suivant les puissances de $x-m$:

$$f(x)=a_0(x-m)^n+c_1(x-m)^{n-1}+\ldots+c_{n-1}(x-m)+c_n.$$

Les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont (m étant entier) des nombres entiers. $c_n=f(m)$. Substituant $x=\frac{p}{q}$, nous obtenons

$$a_0(p-mq)^n+c_1(p-mq)^{n-1}q+\ldots+c_{n-1}(p-mq)q^{n-1}+c_nq^n=0,$$

d'où nous concluons que $\frac{c_nq^n}{p-mq}$ est un nombre entier.

Etant donné que la fraction $\frac{p-mq}{q}=\frac{p}{q}-m$ n'est pas réductible, les nombres $p-mq$ et q sont premiers entre eux. Par conséquent, $c_n=f(m)$ est divisible par $p-mq$, ce qu'il fallait démontrer.

664. Pour l'exemple a) nous donnons la solution détaillée.

Les valeurs possibles de p sont $1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14$; pour q seulement 1 (nous estimons que le signe est associé au numérateur).

$f(1) = -4$. Par conséquent, $p-1$ doit être un diviseur de 4. On rejette les éventualités $p = 1, -2, 7, -7, 14, -14$. Il reste à essayer -1 et 2.

$f(-1) \neq 0$; $f(2) = 0$. L'unique zéro rationnel est $x_1 = 2$.

b) $x_1=-3$; c) $x_1=-2, x_2=3$; d) $x_1=-3, x_2=\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}$; f) $1, -2, 3$; g) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$;

h) il n'y a pas de zéros rationnels; i) $-1, -2, -3, +4$;

k) $\frac{1}{2}$; l) $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$; m) $x_1=x_2=1, x_3=x_4=-3$;

n) $x_1=3, x_2=x_3=x_4=x_5=-1$; o) $x_1=x_2=x_3=2$.

665. D'après le problème nº 663, les nombres p et $p-q$ sont simultanément impairs. Par conséquent, q est un nombre pair et ne peut pas être égal à l'unité.

666. D'après le problème nº 663 $p-x_1q=\pm 1$, $p-x_2q=\pm 1$, d'où $(x_2-x_1)q=\pm 2$ ou 0. La valeur 0 ne peut convenir puisque $q>0$, $x_2 \neq x_1$. Posant pour fixer les idées $x_2 > x_1$ nous obtenons $(x_2-x_1)q = 2$. Cette égalité n'est pas possible pour $x_2-x_1>2$. Supposons maintenant que $x_2-x_1=1$ ou 2. Les seules valeurs de p et q pour lesquelles l'égalité $(x_2-x_1)q=2$ est possible sont $p=x_1q+1$, $q=\frac{2}{x_2-x_1}$, d'où l'unique possibilité pour le zéro rationnel d'être égal à $\frac{p}{q}=x_1+\frac{1}{q}=\frac{x_1+x_2}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

667. Le critère d'Eisenstein est rempli:

a) pour $p=2$; b) pour $p=3$; c) pour $p=3$ après le développement du polynôme suivant les puissances de $x-1$.

668. $X_p(x)=(x-1)^{p-1}+\frac{p}{1}(x-1)^{p-2}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(x-1)^{p-3}+\ldots+p.$

Tous les coefficients $C_k=\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$, $k \leqslant p-1$, sont divisibles par p, car $k!\,C_k=p(p-1)\ldots(p-k+1)$ est divisible par p et $k!$ est réciproquement premier avec p. Donc pour $X_p(x)$, après le développement suivant les puissances de $x-1$, le critère d'Eisenstein est rempli pour le nombre premier p.

669. Appliquons le critère d'Eisenstein au nombre p, en posant $x=y+1$:

$$X_{p^k}(x)=\varphi(y)=\frac{(y+1)^{p^k}-1}{(y+1)^{p^{k-1}}-1}.$$

Le coefficient du terme principal du polynôme φ est égal à 1. Dans $\varphi(y)$ le terme indépendant de y, égal à $\varphi(0)=X_{p^k}(1)=p$, est divisible par p et non divisible par p^2. Il reste à démontrer que tous les autres coefficients sont divisibles par p. Pour cela démontrons par récurrence que tous les coefficients du polynôme $(y+1)^{p^n}-1$, excepté le coefficient du terme principal, sont divisibles par p. C'est vrai pour $n=1$. Admettons que c'est vrai pour l'exposant p^{n-1}, c'est-à-dire que $(y+1)^{p^{n-1}}=y^{p^{n-1}}+1+pw_{n-1}(y)$, où $w_{n-1}(y)$ est un polynôme à coefficients entiers. Alors $(y+1)^{p^n}=(y^{p^{n-1}}+1+pw_{n-1}(y))^p=$ $=(y^{p^{n-1}}+1)^p+p\psi(y)=y^{p^n}+1+pw_n(y)$; $\psi(y)$ et $w_n(y)$ sont des polynômes à coefficients entiers. Ainsi

$$\varphi(y)=\frac{y^{p^k}+pw_k(y)}{y^{p^{k-1}}+pw_{k-1}(y)}=$$

$$=y^{p^k-p^{k-1}}+p\,\frac{w_k(y)-y^{p^k-p^{k-1}}w_{k-1}(y)}{y^{p^{k-1}}+pw_{k-1}(y)}=y^{p^k-p^{k-1}}+p\chi(y).$$

Les coefficients du polynôme $\chi(y)$ sont des entiers, puisque $\chi(y)$ est le quotient de la division de polynômes à coefficients entiers et le coefficient du terme principal du diviseur est égal à l'unité. Par conséquent, tous les coefficients du polynôme $\varphi(y)$, excepté le coefficient du terme principal, sont divisibles par p. Les conditions du théorème d'Eisenstein sont vérifiées.

670. Admettons que le polynôme soit réductible: $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$.

Les deux facteurs possèdent des coefficients entiers et sont de degré supérieur à 1, puisque, d'après les conditions du problème, $f(x)$ ne possède pas de zéros rationnels. Soit

$$\varphi(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k,$$
$$\psi(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_m,$$

$k\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, $k+m=n$. Puisque $b_kc_m=a_n$ est divisible par p et non divisible par p^2, on peut supposer que b_k est divisible par p et c_m ne l'est pas.

Soit b_i le premier coefficient de $\varphi(x)$ en commençant par la fin qui n'est pas divisible par p, $i\geqslant 0$. Un tel coefficient existe puisque $a_0=b_0c_0$ n'est pas divisible par p. Alors $a_{m+i}=b_ic_m+b_{i+1}c_{m-1}+\ldots$ n'est pas divisible par p, puisque b_ic_m ne l'est pas non plus et b_{i+1}, b_{i+2}, ... sont divisibles par p. Cela contredit la condition du problème, car $m+i\geqslant 2$.

671. Décomposant $f(x)$ en facteurs irréductibles à coefficients entiers, considérons le facteur irréductible $\varphi(x)$ dont le terme indépendant de x est divisible par p. On peut trouver un tel facteur puisque a_n est divisible par p. Désignons par $\psi(x)$ le quotient de la division de $f(x)$ par $\varphi(x)$. Soit

$$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m,$$
$$\psi(x)=c_0x^h+c_1x^{h-1}+\ldots+c_h,$$

et b_i est le premier coefficient de $\varphi(x)$ en commençant par la fin qui n'est pas divisible par p ; c_h n'est pas divisible par p, étant donné que $a_n=b_mc_h$ n'est pas divisible par p^2.

C'est pourquoi $a_{h+i}=b_ic_h+b_{i+1}c_{h-1}+\ldots$ n'est pas divisible par p, d'où il découle que $h+i\leqslant k$. Par conséquent, $m\geqslant m+h+i-k=n+$ $+i-k\geqslant n-k$.

672. a) $f(0)=1$, $f(1)=-1$, $f(-1)=-1$. Si $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ et le degré de $\varphi(x)\leqslant 2$, alors $\varphi(0)=\pm1$, $\varphi(1)=\pm1$, $\varphi(-1)=\pm1$, c'est-à-dire que $\varphi(x)$ est donné par l'une des tables:

x	$\varphi(x)$							
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
0	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1

On peut ne pas examiner les 5 dernières tables, étant donné que les quatre dernières déterminent des polynômes ne se distinguant que par leur signe des polynômes donnés par les quatre premières tables. La quatrième table, elle, détermine un polynôme identiquement égal à l'unité. Les trois premières tables donnent les possibilités suivantes :

$$\varphi(x) = -(x^2 + x - 1);\ \varphi(x) = x^2 - x - 1;\ \varphi(x) = 2x^2 - 1.$$

Les essais par division donnent :

$$f(x) = (x^2 + x - 1)(x^3 - x - 1).$$

b) Irréductible ; c) irréductible ; d) $(x^2 - x - 1)(x^2 - 2)$.

673. Le polynôme réductible du troisième degré a un facteur du premier degré à coefficients rationnels, et c'est pourquoi il a un zéro rationnel.

674. Le polynôme $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, ne possédant pas de zéros rationnels peut être décomposé, en cas de réductibilité, uniquement en facteurs du deuxième degré à coefficients entiers :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + \lambda x + m)(x^2 + \mu x + n).$$

Il est évident que le nombre m doit être un diviseur de d ; $mn = d$. La comparaison des coefficients de x^3 et x donne

$$\lambda + \mu = a, \quad n\lambda + m\mu = c.$$

Ce système est indéterminé si, et seulement si, $m = n$, $c = am$, c'est-à-dire si $c^2 = a^2d$ (cf. problème n° 614).

Si, au contraire, $m \neq n$ on a $\lambda = \frac{c - am}{n - m} = \frac{cm - am^2}{d - m^2}$, ce qu'il fallait démontrer.

675. En cas de réductibilité il faut que

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = (x^2 + \lambda x + m)(x^3 + \lambda' x^2 + \lambda'' x + n).$$

Les coefficients des facteurs doivent être des entiers.

La comparaison des coefficients donne $mn = e$, d'où il découle que m est un diviseur de e. Ensuite,

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda' &= a, \\ n\lambda + m\lambda'' &= d, \\ m + \lambda\lambda' + \lambda'' &= b, \\ n + \lambda\lambda'' + m\lambda' &= c, \end{aligned}$$

d'où

$$m\lambda'' - n\lambda' = d - an,$$
$$\lambda(m\lambda'' - n\lambda') + m^2\lambda' - n\lambda'' = cm - bn$$

et, par conséquent, $(d - an)\lambda + m^2\lambda' - n\lambda'' = cm - bn$. Résolvant cette équation simultanément avec $\lambda + \lambda' = a$, $n\lambda + m\lambda'' = d$, nous obtenons

$$\lambda = \frac{am^3 - cm^2 - dn + be}{m^3 - n^2 + ae - dm},$$

ce qu'il fallait démontrer.

676. a) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - x - 3)$; b) irreductible ; c) $(x^2 - x - 4) \times (x^2 + 5x + 3)$; d) $(x^2 - 2x + 2)(x^3 + 3x + 3)$.

677. Sans restreindre la généralité, on recherche les conditions pour lesquelles $x^4 + px^2 + q$ se décompose en facteurs du deuxième degré à coefficients rationnels, car si le polynôme admet x_1 comme zéro rationnel, $-x_1$ est aussi un zéro rationnel, et l'on peut rassembler les facteurs linéaires qui leur correspondent.

Soit $x^4+px^2+q=(x^2+\lambda_1 x+\mu_1)(x^2+\lambda_2 x+\mu_2)$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2&=0,\\ \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1&=0,\\ \mu_1+\lambda_1\lambda_2+\mu_2&=p,\\ \mu_1\mu_2&=q. \end{aligned}$$

Si $\lambda_1=0$, alors $\lambda_2=0$. Dans ce cas, pour que μ_1 et μ_2 rationnels existent, il faut et il suffit que le discriminant p^2-4q soit le carré d'un nombre rationnel.

Soit $\lambda_1\neq 0$. Alors $\lambda_2=-\lambda_1$, $\mu_2=\mu_1$ et ensuite

$$q=\mu_1^2,\qquad 2\mu_1-p=\lambda_1^2.$$

Donc, pour la réductibilité du polynôme x^4+px^2+q il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des deux conditions:

a) p^2-4q est le carré d'un nombre rationnel;

b) q est le carré du nombre rationnel μ_1, $2\mu_1-p$ est le carré du nombre rationnel λ_1.

678. Si $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$, alors, comme $p_1+p_2=a$, on peut écrire:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left(\frac{p_1-p_2}{2}x+\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2,$$

où $\lambda=q_1+q_2$. Il en résulte que l'équation auxiliaire du troisième degré a comme racine rationnelle $\lambda=q_1+q_2$.

679. Supposons que $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ et $\varphi(x)$, $\psi(x)$ aient des coefficients entiers. Puisque $f(a_i)=-1$, nous avons $\varphi(a_i)=1$, $\psi(a_i)=-1$ ou $\varphi(a_i)=$ $=-1$, $\psi(a_i)=1$, et, par conséquent,

$$\varphi(a_i)+\psi(a_i)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont tous deux non constants, le degré de $\varphi(x)+\psi(x)$ est inférieur à n, d'où il découle que $\varphi(x)+\psi(x)$ est identiquement nul. Donc on doit avoir $f(x)=-[\varphi(x)]^2$. Cela est impossible puisque le coefficient du terme principal de $f(x)$ est positif.

680. Si $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, on a $\varphi(a_i)=\psi(a_i)=\pm 1$ puisque $f(a_i)=1$. Par conséquent, si φ et ψ ne sont pas constants, $\varphi(x)=\psi(x)$ identiquement et

$$f(x)=[\varphi(x)]^2.$$

Ce n'est possible que pour n pair.

Ainsi, le seul développement possible est

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1=[\varphi(x)]^2.$$

On en déduit, tout en admettant positif le coefficient du terme principal de $\varphi(x)$, que

$$\begin{aligned} \varphi(x)+1&=(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),\\ \varphi(x)-1&=(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_n). \end{aligned}$$

(Pour avoir le droit d'écrire ces égalités, il faut changer la numérotation des nombres a_1, a_2, ..., a_n.) Et en définitive

$$(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})-(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_n)=2.$$

Posons $a_1>a_3>\ldots>a_{n-1}$. Substituant dans la dernière égalité $x=a_{2k}$ $k=1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2}$, nous obtenons

$$(a_{2k}-a_1)(a_{2k}-a_3)\ldots(a_{2k}-a_{n-1})=2,$$

autrement dit le nombre 2 doit être décomposé en $\frac{n}{2}$ facteurs entiers, disposés dans l'ordre de croissance, de $\frac{n}{2}$ façons. Ceci est possible uniquement pour $\frac{n}{2}=2$, $2=-2\cdot(-1)=1\cdot 2$ et pour $\frac{n}{2}=1$. Ces deux possibilités nous amènent précisément aux deux cas de réductibilité du polynôme $f(x)$ cités dans les conditions du problème.

681. Si le polynôme $f(x)$ de degré n est réductible pour $n=2m$ ou $n=2m+1$, le degré de l'un de ses facteurs $\varphi(x)$ n'est pas supérieur à m. Si $f(x)$ admet les valeurs ± 1 pour plus de $2m$ valeurs entières de la variable, $\varphi(x)$ admet aussi les valeurs ± 1 pour les mêmes valeurs de la variable. Parmi ces valeurs de $\varphi(x)$ il y en a plus de m égales à $+1$ ou -1. Mais dans ce cas $\varphi(x)=+1$ ou -1 identiquement.

682. Le polynôme $f(x)$ n'a pas de zéros réels. Par conséquent, s'il est réductible, ses facteurs $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ n'ont pas de zéros réels et ne changent donc pas de signe pour des valeurs réelles de x. On peut admettre que $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$, pour toutes les valeurs réelles de x. Puisque $f(a_k)=1$, on a $\varphi(a_k)=\psi(a_k)=1$, $k=1, 2, \ldots, n$. Si le degré de $\varphi(x)$ (ou de $\psi(x)$) est inférieur à n, alors $\varphi(x)=1$ (ou $\psi(x)=1$) identiquement. Par conséquent, les degrés de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ sont égaux à n. Alors $\varphi(x)=1+\alpha(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, $\psi(x)=1+\beta(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, où α et β sont des nombres entiers. Mais alors

$$f(x)=(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2+1=1+(\alpha+\beta)(x-a_1)\ldots$$
$$\ldots(x-a_n)+\alpha\beta(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2.$$

La comparaison des coefficients de x^{2n} et de x^n donne le système d'équations $\alpha\beta=1$, $\alpha+\beta=0$, qui n'admet pas de solutions entières. Par conséquent, $f(x)$ est irréductible.

683. Supposons que $f(x)$ admet la valeur 1 plus de trois fois. Alors $f(x)-1$ possède au moins quatre zéros entiers, c'est-à-dire que

$$f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x),$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 et les coefficients du polynôme $h(x)$ sont des nombres entiers. Pour des valeurs entières de x l'expression $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$ est le produit de nombres entiers distincts. Deux d'entre eux peuvent être égaux à $+1$ et -1, les deux autres sont différents de ± 1. Par conséquent, leur produit ne peut être égal à un nombre premier, en particulier à -2. Donc, $f(x)-1\neq -2$ pour des valeurs entières de x et, par conséquent, $f(x)\neq -1$.

684. Soit $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$. L'un des facteurs $\varphi(x)$ est de degré $\leqslant\frac{n}{2}$ et admet les valeurs ± 1 pour plus de $\frac{n}{2}$ valeurs entières de x. Etant donné que $\frac{n}{2}\geqslant 6$, $+\varphi(x)$ ou $-\varphi(x)$ admet la valeur 1 plus de trois fois et, en vertu du résultat du problème nº 683, ne peut admettre la valeur -1. Donc $\varphi(x)$ ou $-\varphi(x)$ admet la valeur $+1$ plus de $\frac{n}{2}$ fois et, par conséquent, $\varphi(x)$ ou $-\varphi(x)$ est identiquement égal à 1. Par conséquent, $f(x)$ est irréductible.

Précisant le raisonnement, on peut démontrer que le résultat est vrai pour $n\geqslant 8$.

685. Soit

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=\psi(x)w(x).$$

Le degré d'un des facteurs est $\leqslant n$; $\psi(x)$ admet les valeurs ± 1 quand $x=a_1$, $a_2, \ldots, a_n$ et, vu que $n\geqslant 7$, toutes ces valeurs de $\psi(x)$ doivent être de même signe. Par conséquent:

$$\psi(x)=\pm 1+\alpha(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=\pm 1+\alpha\varphi(x).$$

Si $\alpha \neq 0$, $w(x)$ est aussi de degré n et $w(x) = \pm 1 + \beta\varphi(x)$. Mais l'égalité

$$a[\varphi(x)]^2 + b\varphi(x) + 1 = [\pm 1 + \alpha\varphi(x)][\pm 1 + \beta\varphi(x)]$$

est impossible, puisque, d'après les conditions du problème, le polynôme $ax^2 + bx + 1$ est irréductible.

686. a) $f(x) = a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right)$.

Soit $\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right| = A$. Alors, pour $|x| > 1$, on a

$$|f(x)| \geqslant |a_0x^n|\left[1 - \frac{A}{|x|-1}\right] = |a_0x^n|\frac{|x|-1-A}{|x|-1}.$$

Par conséquent, $|f(x)| > 0$ si $|x| > 1 + A$.

b) $\frac{1}{\rho^n}f(x) = a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n + \frac{a_1}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1} + \frac{a_2}{\rho^2}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{\rho^n}$.

En vertu de a) pour tous les zéros

$$\frac{|x|}{\rho} \leqslant 1 + \max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|, \text{ d'où } |x| \leqslant \rho + \max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|.$$

c) Posons $\rho = \max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$. Alors

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right| \leqslant \rho^k, \quad \left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right| \leqslant \rho, \quad \max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right| \leqslant \rho.$$

Par conséquent, les modules de tous les zéros ne dépassent pas $\rho + \rho = 2\rho = 2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$.

d) Posons $\rho = \max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$. Alors

$$|a_k| \leqslant |a_1|\rho^{k-1}, \quad \left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right| \leqslant \left|\frac{a_1}{a_0}\right|.$$

Par conséquent, les modules des zéros ne dépassent pas

$$\rho + \left|\frac{a_1}{a_0}\right| = \left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}.$$

687. Soit $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$$\varphi(x) = b_0x^n - b_1x^{n-1} - \ldots - b_n;$$

$0 \leqslant b_0 \leqslant |a_0|$, $b_1 \geqslant |a_1|, \ldots, b_n \geqslant |a_n|$. Il est évident que $|f(x)| \geqslant \varphi(|x|)$. Ensuite

$$\varphi(x) = b_0x^n\left(1 - \frac{b_1}{b_0x} - \frac{b_2}{b_0x^2} - \ldots - \frac{b_n}{b_0x^n}\right).$$

L'expression entre parenthèses croît de $-\infty$ à 1 pour x variant de 0 à $+\infty$. Par conséquent, $\varphi(x)$ possède un seul zéro positif ξ et $\varphi(x) > 0$ pour $x > \xi$. Cela fait que pour $|x| > \xi$ nous avons $|f(x)| \geqslant \varphi(|x|) > 0$, d'où il découle que les modules de tous zéros de $f(x)$ ne dépassent pas ξ.

688. a) Soit $A = \max\left|\frac{a_h}{a_0}\right|$. Il est évident que

$$|f(x)| \geqslant |a_0x^n|\left(1 - \frac{A}{|x|^r} - \frac{A}{|x|^{r+1}} - \ldots - \frac{A}{|x|^n}\right),$$

d'où pour $|x|>1$

$$|f(x)|>|a_0x^n|\left(1-\frac{A}{|x|^{r-1}(|x|-1)}\right)=$$

$$=\frac{|a_0x^{n-r+1}|}{|x|-1}[|x|^{r-1}(|x|-1)-A]>\frac{|a_0x|^{n-r+1}}{|x|-1}[(|x|-1)^r-A].$$

Pour $|x|>1+\sqrt[r]{A}$ nous avons $|f(x)|>0$.

b) $\frac{1}{\rho^n}f(x)=a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n+\frac{a_r}{\rho^r}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-r}+\ldots+\frac{a_n}{\rho^n}$.

En vertu de a) pour tous les zéros de $f(x)$ on a

$$\left|\frac{x}{\rho}\right|<1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|},\ \text{d'où}\ |x|<\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_h}{a_0\rho^{k-r}}\right|}.$$

c) Posons $\rho=\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$. Alors $|a_k|\leqslant|a_r|\rho^{k-r}$, et les modules de tous les zéros du polynôme ne dépassent pas

$$\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\rho=\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}.$$

689. Pour les zéros négatifs du polynôme l'affirmation est évidente. Posons pour fixer les idées $a_0>0$ et désignons $\varphi(x)=a_0x^n-b_1x^{n-1}-b_2x^{n-2}-\ldots$ $\ldots-b_n$, où $b_k=0$ pour $a_k>0$, $b_k=-a_k$ pour $a_k<0$. Alors pour un x positif, il est évident que

$$f(x)\geqslant\varphi(x).$$

Ensuite, $\varphi(x)$ a un seul zéro non négatif ξ (cf. problème nº 687) et $\varphi(x)>0$ pour $x>\xi$. Par conséquent, pour $x>\xi$ on a $f(x)\geqslant\varphi(x)>0$.

690. Découle immédiatement des problèmes nºs 688, 689, 686 c).

692. Développant $f(x)$ suivant les puissances de $x-a$, nous obtenons pour $x\geqslant a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n>0.$$

693. On trouve la limite supérieure des zéros en utilisant les résultats des problèmes nºs 690, 692. Pour déterminer la limite inférieure on remplace x par $-x$:

a) $0<x_i<3$; b) $0<x_i<1$; c) $-11<x_i<11$; d) $-6<x_i<2$.

694. a) $f=x^3-3x-1$, $f_1=x^2-1$, $f_2=2x+1$, $f_3=\pm1$.
Trois zéros réels dans les intervalles $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

b) $f=x^3+x^2-2x-1$, $f_1=3x^2+2x-2$, $f_2=2x+1$, $f_3=+1$.
Trois zéros réels dans les intervalles $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

c) $f=x^3-7x+7$, $f_1=3x^2-7$, $f_2=2x-3$, $f_3=+1$. Trois zéros réels dans les intervalles $(-4, -3)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

d) $f=x^3-x+5$, $f_1=3x^2-1$, $f_2=2x-15$, $f_3=-1$.
Un zéro réel dans l'intervalle $(-2, -1)$.

e) $f=x^3+3x-5$, $f_1=x^2+1$.
Un zéro réel dans l'intervalle $(1, 2)$.

695. a) $f=x^4-12x^2-16x-4$, $f_1=x^3-6x-4$, $f_2=3x^2+6x+$ $+2$, $f_3=x+1$, $f_4=1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(4, 5)$.

b) $f = x^4 - x - 1$, $f_1 = 4x^3 - 1$, $f_2 = 3x + 4$, $f_3 = +1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(-1, 0)$ et $(1, 2)$.

c) $f = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$, $f_1 = x^3 - 3x^2 + 2x$, $f_2 = 2x^2 - 4x + 1$, $f_3 = x - 1$, $f_4 = 1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

d) $f = x^4 + x^2 - 1$, $f_1 = 2x^3 + x$, $f_2 = -x^2 + 2$, $f_3 = -x$, $f_4 = -1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.

e) $f = x^4 + 4x^3 - 12x + 9$, $f_1 = x^3 + 3x^2 - 3$, $f_2 = x^2 + 3x - 4$, $f_3 = -4x + 3$, $f_4 = 1$. N'a pas de zéros réels.

696. a) $f = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$, $f_1 = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5$, $f_2 = 22x^2 - 22x - 45$, $f_3 = 2x - 1$, $f_4 = 1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$ $(-2, -1)$.

b) $f = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$, $f_1 = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$, $f_2 = x^2 + 5x - 3$, $f_3 = -9x + 5$, $f_4 = -1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $f_1 = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 1$, $f_2 = 9x^2 - 3x - 5$, $f_3 = 9x + 1$, $f_4 = +1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

d) $f = x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$, $f_1 = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $f_2 = -5x^2 + 10x + 17$, $f_3 = -8x - 5$, $f_4 = -1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(1, 2)$, $(-1, 0)$.

e) $f = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $f_1 = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$, $f_2 = 5x^2 - x - 2$, $f_3 = 18x + 1$, $f_4 = +1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(4, 5)$.

697. a) $f = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$, $f_1 = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4$, $f_2 = 17x^2 - 17x - 8$, $f_3 = 2x - 1$, $f_4 = 1$.

Quatre zéros réels dans les intervalles $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$.

b) $f = x^4 - 4x^2 + x + 1$, $f_1 = 4x^3 - 8x + 1$, $f_2 = 8x^2 - 3x - 4$, $f_3 = 87x - 28$, $f_4 = +1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$, $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1$, $f_2 = 11x^2 + 14x - 15$, $f_3 = -8x + 7$, $f_4 = -1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(0, 1)$ et $(1, 2)$.

d) $f = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 8$, $f_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$, $f_2 = -x^2 + 5x - 5$, $f_3 = -9x + 13$, $f_4 = -1$. Deux zéros réels $x_1 = 2$, $1 < x_2 < 2$.

e) $f = x^4 - x^3 - 2x + 1$, $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 2$, $f_2 = 3x^2 + 24x - 14$, $f_3 = -56x + 31$, $f_4 = -1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(0, 1)$ et $(1, 2)$.

698. a) $f = x^4 - 6x^2 - 4x + 2$, $f_1 = x^3 - 3x - 1$, $f_2 = 3x^2 + 3x - 2$, $f_3 = 4x + 5$, $f_4 = 1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

b) $f = 4x^4 - 12x^2 + 8x - 1$, f_1 $2x^3 - 3x + 1$, $f_2 = 6x^2 - 6x + 1$, $f_3 = 2x - 1$, $f_4 = 1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(-3, -2)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $(1, 2)$.

c) $f = 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 1$, $f_1 = 2x^3 + 6x^2 + 3x$, $f_2 = 9x^2 + 9x + 2$, $f_3 = 13x + 8$, $f_4 = 1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(-4, -3)$, $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$.

d) $f = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$, $f_2 = 7x^2 - 8x - 4$, $f_3 = 4x - 5$, $f_4 = 1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$.

e) $f = 9x^4 - 126x^2 - 252x - 140$, $f_1 = x^3 - 7x - 7$, $f_2 = 9x^2 + 27x + 20$, $f_3 = 2x + 3$, $f_4 = 1$. Quatre zéros réels dans les intervalles $(4, 5)$, $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$.

699. a) $f = 2x^5 - 10x^3 + 10x - 3$, $f_1 = x^4 - 3x^2 + 1$, $f_2 = 4x^3 - 8x + 3$, $f_3 = 4x^2 + 3x - 4$, $f_4 = x$, $f_5 = 1$. Cinq zéros réels dans les intervalles $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$.

b) $f = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x + 1$, $f_1 = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 2x - 1$, $f_2 = 3x^4 - 6x^3 - x^2 + 4x - 1$, $f_3 = 4x^3 - 16x^2 + 11x$, $f_4 = 26x^2 - 26x + 5$, $f_5 = 2x - 1$, $f_6 = 1$. Six zéros réels dans les intervalles $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

c) $f = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, $f_1 = 5x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 6x + 3$, $f_2 = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2$, $f_3 = 3x^2 + 2x - 2$, $f_4 = 2x + 1$, $f_5 = 1$.

Cinq zéros réels dans les intervalles $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

d) $f = x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2$, $f_1 = x^4 - 3x^2 - 4x$, $f_2 = x^3 + 4x^2 - 1$, $f_3 = -2x^2 + x + 1$, $f_4 = -3x - 1$, $f_5 = -1$. Trois zéros réels dans les intervalles $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

700. a) $f = x^4 + 4x^2 - 1$, $f_1 = x$, $f_2 = 1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

b) $f = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x + 1$, $f_1 = 2x - 3$, $f_2 = 1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(0, 1)$ et $(2, 3)$.

c) $f = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 1$, $f_1 = 2x - 3$, $f_2 = 1$. Deux zéros réels dans les intervalles $(0, 1)$ et $(2, 3)$.

d) $f = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$, $f_1 = x^3 + 4x - 1$, $f_2 = 5x - 1$, $f_3 = 1$.

Trois zéros réels dans les intervalles $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-6, -5)$.

701. La suite de Sturm est formée des polynômes $x^3 + px + q$, $3x^2 + p$, $-2px - 3q$, $-4p^3 - 27q^2$. Si $-4p^3 - 27q^2 > 0$, on a $p < 0$. Tous les coefficients des termes principaux des polynômes de Sturm sont positifs, et c'est pourquoi tous les zéros de $x^3 + px + q$ sont réels. Si $-4p^3 - 27q^2 < 0$, indépendamment du signe de p la suite de Sturm change deux fois de signe pour $-\infty$ et une fois pour $+\infty$. Dans ce cas $x^3 + px + q$ a un zéro réel.

702. La suite de Sturm est formée des polynômes $x^n + px + q$, $nx^{n-1} + p$, $-(n-1)\,px - nq$, $-p - n\left(\frac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}$.

Quand n est impair, le signe de la dernière expression coïncide avec le signe de $\Delta = -(n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. Si $\Delta > 0$, il est nécessaire que $p < 0$. Dans ce cas le polynôme possède trois zéros réels. Si $\Delta < 0$, indépendamment du signe de p le polynôme possède un zéro réel. Quand n est pair, le signe de la dernière expression dans la suite de Sturm coïncide avec le signe de $-p\Delta$, où $\Delta = (n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. La répartition des signes dans la suite de Sturm pour différentes combinaisons de signes de p et de Δ est donnée dans la table:

		f	f_1	f_2	f_3
1. $p > 0$, $\Delta > 0$	$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$
2. $p < 0$, $\Delta > 0$	$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$
3. $p > 0$, $\Delta < 0$	$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$
	$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$+$
4. $p < 0$, $\Delta < 0$	$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$-$
	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	

L'examen de cette table montre que pour $\Delta > 0$ le polynôme possède deux zéros réels, pour $\Delta < 0$ il n'a pas de zéros réels.

703. La suite de Sturm est formée des polynômes $f = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$, $f_1 = x^4 - 3ax^2 + a^2$, $f_2 = ax^3 - 2a^2x - b$, $f_3 = a(a^2x^2 - bx - a^3)$, $f_4 = a(a^5 - b^2)x$, $f_5 = 1$.

Si $\Delta = a^5 - b^2 > 0$, alors $a > 0$, et tous les coefficients des termes principaux des polynômes de Sturm sont positifs. Dans ce cas tous les cinq zéros du polynôme f sont réels. Si $\Delta < 0$, la répartition des signes en fonction du signe de a est alors la suivante:

		f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$a > 0$	$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$a < 0$	$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Par conséquent, pour $\Delta < 0$ le polynôme f a un zéro réel.

704. Soit f_λ et $f_{\lambda+1}$ deux polynômes voisins d'une suite « complète » de Sturm. Si leurs coefficients des termes principaux sont de même signe, leurs valeurs n'ont pas de changement de signe pour $+\infty$ et changent de signe pour $-\infty$, car le degré de l'un des polynômes est pair et celui de l'autre impair. Si, au contraire, les coefficients des termes principaux sont de signe contraire, les valeurs de f_λ et de $f_{\lambda+1}$ ont un changement de signe pour $+\infty$ et ne changent pas de signe pour $-\infty$. C'est pourquoi, désignant par ν_1 et ν_2 le nombre de changements de signe dans la suite de Sturm pour $-\infty$ et $+\infty$ nous obtenons que $\nu_1 + \nu_2 = n$. D'autre part, $\nu_1 - \nu_2$ est égal au nombre N de zéros réels du polynôme. Par conséquent, $\nu_2 = \frac{n-N}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

705. Se démontre comme le théorème de Sturm avec la seule différence qu'il faut considérer l'accroissement (et non la diminution) du nombre de changements de signe d'une unité lorsqu'on passe par le zéro du polynôme initial.

706. La suite de polynômes construite est une suite de Sturm pour l'intervalle $x_0 \leqslant x < +\infty$ et satisfait aux conditions du problème nº 705 pour l'intervalle $-\infty < x \leqslant x_0$. Par conséquent, le nombre de zéros de f dans l'intervalle (x_0, ∞) est égal à $\nu(x_0) - \nu(+\infty)$, le nombre de zéros de f dans l'intervalle $(-\infty, x_0)$ est égal à $\nu(x_0) - \nu(-\infty)$, où ν est le nombre de changements de signe des valeurs correspondantes des polynômes.

Le nombre total de zéros réels est égal à

$$2\nu(x_0) - \nu(+\infty) - \nu(-\infty).$$

707. L'application du théorème d'Euler a

$$P_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^{n-1}}$$

donne

$$P_n=(-1)^{n-1}e^{\frac{x^2}{2}}\left(x\frac{d^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}}+(n-1)\frac{d^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-2}}\right),$$

d'où

$$P_n=xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2}.$$

D'autre part, en dérivant l'égalité déterminant P_{n-1} nous obtenons

$$P'_{n-1}=(-1)^{n-1}xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}}+(-1)^{n-1}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^ne^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n},$$

d'où

$$P'_{n-1}=xP_{n-1}-P_n.$$

Comparant avec la formule précédente nous obtenons $P'_{n-1}=(n-1)P_{n-2}$ et, par conséquent, $P'_n=nP_{n-1}$.

Il découle des formules que nous venons d'établir que la suite P_n, P_{n-1}, ..., P_1, $P_0=1$ est une suite de Sturm pour les polynômes P_n, puisque P_{n-1} ne diffère de P'_n que par un facteur n et $P_{\lambda-1}$ est le reste, pris avec un signe contraire, de la division de $P_{\lambda+1}$ par P_λ à un facteur positif près.

Tous les coefficients des termes principaux des polynômes P_n sont égaux à $+1$. Par conséquent, tous les zéros de P_n sont réels.

708. Dérivant l'égalité déterminant P_n nous obtenons

$$P'_n=(-1)^ne^x\frac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n}+(-1)^ne^x\frac{d^n(nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x})}{dx^n},$$

d'où

$$P'_n=(-1)^n ne^x\frac{d^n(x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}$$

Ensuite

$$P_n=(-1)^ne^x\frac{d^n(x\cdot x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}=$$

$$=(-1)^ne^x\left[x\frac{d^n(x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})}{dx^{n-1}}\right]=\frac{x}{n}P'_n-nP_{n-1},$$

d'où $xP'_n=nP_n+n^2P_{n-1}$.

D'autre part,

$$P'_n=(-1)^nne^x\frac{d^{n-1}[(n-1)x^{n-2}e^{-x}-x^{n-1}e^{-x}]}{dx^{n-1}},$$

d'où $P'_n=-nP'_{n-1}+nP_{n-1}$. Multipliant par x et remplaçant xP'_n et xP'_{n-1} par leur expression en fonction de P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, nous obtenons

$$P_n=(x-2n+1)P_{n-1}-(n-1)^2P_{n-2}.$$

De ces relations il apparaît que les polynômes voisins P_n ne s'annulent simultanément, et si $P_{n-1}=0$, P_n et P_{n-2} sont de signes contraires. Il découle ensuite de $\frac{P_{n-1}}{P_n}=-\frac{1}{n}+\frac{xP'_n}{n^2P_n}$ que $\frac{P_{n-1}}{P_n}$ change son signe de moins en plus lorsqu'il passe par le zéro positif de P_n. Donc, la suite P_n, $P_{n-1},\ldots$, P_1, $P_0=1$ est une suite de Sturm pour P_n dans l'intervalle $(0, \infty)$. Les coefficients des termes principaux de tous les P_n sont égaux à l'unité. $P_n(0)=(-1)^n n!$. Par conséquent, $\nu(0)-\nu(+\infty)=n$, ce qui signifie que P_n possède n zéros positifs.

709. $E'_n=E_{n-1}$. Ensuite, $E_n=E_{n-1}-\left(-\frac{x^n}{n!}\right)$. C'est pourquoi les polynômes E_n, E_{n-1} et $-\frac{x^n}{n!}$ forment une suite de Sturm pour E_n dans l'intervalle $(-\infty, -\varepsilon)$ pour un ε aussi petit que l'on veut. La répartition des signes est donnée dans la table suivante:

$$\begin{array}{c|ccc} -\infty & (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-1} \\ \hline -\varepsilon & + & + & (-1)^{n-1} \end{array}.$$

Par conséquent, quand n est pair, le polynôme E_n n'a pas de zéros négatifs, quand n est impair, le polynôme E_n possède un zéro négatif. Ensuite, quand $x \geqslant 0$, le polynôme $E_n(x)>0$.

710. Transformons à l'aide de la formule d'Euler l'identité

$$\frac{d^{n+1}\left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n\left[(2x-1)\,e^{\frac{1}{x}}\right]}{dx^n}.$$

Nous obtenons

$$x^2\frac{d^{n+1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n+1}}+2(n+1)\,x\frac{d^ne^{\frac{1}{x}}}{dx^n}+(n+1)\,n\frac{d^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}}=$$
$$=(2x-1)\frac{d^ne^{\frac{1}{x}}}{dx^n}+2n\frac{d^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}},$$

d'où $P_n=(2nx+1)\,P_{n-1}-n\,(n-1)\,P_{n-2}x^2$.

D'autre part, en dérivant l'égalité déterminant P_{n-1}, nous obtenons

$$P_n=(2nx+1)\,P_{n-1}-x^2P'_{n-1}.$$

Comparant les résultats nous voyons que $P'_{n-1}=n\,(n-1)\,P_{n-2}$ et, par conséquent, $P'_n=(n+1)nP_{n-1}$. En vertu des relations établies, la suite des polynômes P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, $\ldots$, $P_0=1$ forme une suite de Sturm pour P_n. Les coefficients des termes principaux de tous les P_n sont positifs. Par conséquent, tous les zéros de P_n sont réels.

711. Calculant de deux façons

$$\frac{d^n\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}{dx^n}=-\frac{d^n\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{dx^n},$$

nous obtenons

$$P_n-2xP_{n-1}+(x^2+1)\,P_{n-2}=0.$$

La dérivation de l'égalité déterminant P_{n-1} donne $P_n=2xP_{n-1}-\frac{x^2+1}{n}P'_{n-1}$, d'où $P'_{n-1}=nP_{n-2}$ et, par conséquent, $P'_n=(n+1)\,P_{n-1}$.

Il découle des formules déduites que P_n, P_{n-1}, $\ldots$, $P_0=1$ forment une suite de Sturm pour P_n. Tous les coefficients des termes principaux de la suite sont positifs, par conséquent, tous les zéros de P_n sont réels.

Il est facile de résoudre ce problème directement. Plus précisément,

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}+\frac{1}{x+i}\right).$$

d'où nous obtenons que

$$P_n(x)=\frac{1}{2i}[(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}].$$

Il est facile de calculer que les zéros de P_n sont $\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

712. Développant d'après la formule d'Euler l'identité

$$\frac{d^n\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^n}=\frac{d^{n-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^{n-1}},$$

nous obtenons

$$P_n-(2n-1)\,xP_{n-1}+(n-1)^2(x^2+1)\,P_{n-2}=0.$$

En dérivant l'équation qui détermine P_{n-1} nous avons

$$P_n-(2n-1)\,xP_{n-1}+(x^2+1)\,P'_{n-1}=0,$$

d'où

$$P'_{n-1}=(n-1)^2\,P_{n-2} \text{ et } P'_n=n^2P_{n-1}.$$

Il découle des relations trouvées que $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0=1$ forment une suite de Sturm.

Les coefficients des termes principaux étant positifs, tous les zéros de P_n sont réels.

713. Les fonctions $F(x)$, $F'(x)$ et $[f'(x)]^2$ forment une suite de Sturm pour F. Les coefficients des termes principaux de la suite $3a_0^2$, $12a_0^2$ et $9a_0^2$ sont positifs. Par conséquent, le nombre de changements de signe perdus lors du passage de x de $-\infty$ à $+\infty$ est égal à 2.

Si f a un zéro double, F a un zéro triple et un zéro simple. Si f a un zéro triple, F a un zéro quadruple.

714. Si l'un quelconque des polynômes de la suite de Sturm a un zéro multiple x_0 ou un zéro complexe α, on peut remplacer ce polynôme par un polynôme de degré inférieur en le divisant par la quantité positive $(x-x_0)^2$ ou $(x-\alpha)\times\times(x-\alpha')$. On peut remplacer les polynômes suivants par les restes, pris avec le signe contraire, restes que donne l'algorithme d'Euclide pour le polynôme à remplacer et celui qui le précède. Après cela le nombre de changements de signe pour $x=-\infty$ devient $\leqslant n-2$, où n est le degré du polynôme. Par conséquent, le nombre de zéros réels est a fortiori $\leqslant n-2$.

715. Soit $F(x)=(x^2-1)^n$. $F(x)$ admet -1 et $+1$ comme zéros d'ordre de multiplicité n. $F'(x)$ a -1 et $+1$ comme zéros d'ordre de multiplicité $n-1$, et, d'après le théorème de Rolle, encore un autre zéro dans l'intervalle $(-1, +1)$. $F''(x)$ a -1 et $+1$ comme zéros d'ordre de multiplicité $n-2$ et deux zéros dans l'intervalle ouvert $(-1, +1)$ et ainsi de suite. $F^{(n)}(x)=P_n(x)$ admet n zéros dans l'intervalle ouvert $(-1, +1)$.

716. Soient $x_1, \ldots, x_k$ les différents zéros de $f(x)$ d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_k$. La fonction $\varphi(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ est continue dans les intervalles ouverts $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{k-1}, x_k) et $(x_k, +\infty)$, varie de 0 à $-\infty$ dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$, de $+\infty$ à $-\infty$ dans chacun des intervalles (x_{i-1}, x_i) et de $+\infty$ à 0 dans l'intervalle (x_k, ∞), car $\varphi(x)\to\infty$ quand $x\to x_i$ et change son signe de $-$ en $+$ en passant par x_i.

Par conséquent, $\varphi(x)+\lambda$ admet un zéro dans chacun des intervalles (x_{i-1}, x_i) et, en outre, pour $\lambda>0$ un zéro dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$ et pour $\lambda<0$ un zéro dans l'intervalle $(x_k, +\infty)$.

Ainsi $\varphi(x)+\lambda$ et donc $f(x)[\varphi(x)+\lambda]=\lambda f(x)+f'(x)$ admet k zéros différents de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pour $\lambda \neq 0$ ou $k-1$ zéros différents de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pour $\lambda=0$. En outre, $\lambda f(x)+f'(x)$ admet $x_1, x_2, \ldots, x_k$ comme zéros d'ordre de multiplicité $\alpha_1-1, \alpha_2-1, \ldots, \alpha_k-1$. Aussi le nombre total de zéros réels (compte tenu de l'ordre de multiplicité) du polynôme $\lambda f(x)+f'(x)$ est égal à $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ pour $\lambda \neq 0$ et à $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-1$ pour $\lambda=0$, c'est-à-dire qu'il est égal au degré du polynôme $\lambda f(x)+f'(x)$.

717. Soit $g(x)=a_0(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)\ldots(x+\lambda_n)$, $F_0(x)=a_0 f(x)$, $F_1(x)=F_0(x)+\lambda_1 F_0'(x)=a_0 f(x)+a_0\lambda_1 f'(x)$, $F_2(x)=F_1(x)+\lambda_2 F_1'(x)=$ $=a_0 f(x)+a_0(\lambda_1+\lambda_2)f'(x)+a_0\lambda_1\lambda_2 f''(x)$, etc. Alors $F_n(x)=F_{n-1}(x)+$ $+\lambda_n F_{n-1}'(x)=a f(x)+a_1 f'(x)+\ldots+a_n f^{(n)}(x)$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficients de g. En vertu du résultat du problème n° 715 tous les zéros de tous les polynômes $F_0, F_1, \ldots, F_n$ sont réels.

718. Le polynôme $a_0x^n+a_1mx^{n-1}+\ldots+m(m-1)\ldots(m-n+1)\times$ $\times a_n=[a_0x^m+a_1(x^m)'+\ldots+a_n(x^m)^{(n)}]\cdot x^{n-m}$, mais tous les zéros de x^m sont réels.

719. Le polynôme $a_nx^n+na_{n-1}x^{n-1}+n(n-1)a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0n!$ n'a que des zéros réels. Par conséquent, tous les zéros de $a_0n!x^n+a_1n(n-1)\ldots$ $\ldots 2x^{n-1}+\ldots+na_{n-1}x+a_n$ sont réels. Appliquant à nouveau le résultat du problème n° 718, nous obtenons que tous les zéros du polynôme $a_0n!x^n+$ $+a_1n\cdot n(n-1)\ldots 2x^{n-1}+a_2n(n-1)\cdot n(n-1)\ldots 3x^{n-2}+\ldots+a_nn!$ sont réels. Il reste à diviser par $n!$.

720. Tous les zéros du polynôme $(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+x^n$ sont réels. Il reste à appliquer le résultat du problème n° 719.

721. Le polynôme $f(x)=nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-1$ a un zéro réel 1. Ensuite, soit $F(x)=(x-1)f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$. Alors $F'(x)=n(n+1)(x-1)x^{n-1}$. Pour n impair, le polynôme $F(x)$ admet un seul minimum pour $x=1$ et, par conséquent, n'a pas pour zéros que le zéro double $x=1$. Pour n pair, le polynôme $F(x)$ croît de $-\infty$ à 1 pour $-\infty<x\leqslant$ $\leqslant 0$, décroît de 1 à 0 pour $0\leqslant x\leqslant 1$ et croît de 0 à ∞ pour $1\leqslant x<\infty$. Aussi dans ce cas $F(x)$ a un seul zéro autre que le zéro $x=1$.

722. La dérivée du polynôme qui nous intéresse est positive pour toutes les valeurs réelles de x. Par conséquent, le polynôme n'a qu'un seul zéro réel.

723. Soit $a<b<c$; $f(-\infty)<0$; $f(a)=B^2(b-a)+C^2(c-a)>0$; $f(c)=-A^2(c-a)-B^2(c-b)<0$; $f(+\infty)>0$. Par conséquent, f possède des zéros réels dans les intervalles $(-\infty, a)$; (a, c); $(c, +\infty)$.

724. $$\varphi(a+bi)=B+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2}{a+bi-a_k}=B+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2(a-a_k-bi)}{(a-a_k)^2+b^2};$$

$$\operatorname{Im}(\varphi(a+bi))=-b\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2}{(a-a_k)^2+b^2}\neq 0$$ pour $b\neq 0$, car tous les termes se trouvant sous le signe somme sont positifs. Par conséquent, $\varphi(a+bi)\neq 0$ pour $b\neq 0$. On peut obtenir le même résultat en se basant sur le fait que $\varphi(x)$ varie de $+\infty$ à $-\infty$ quand x varie de a_i à a_{i+1}, $\varphi(x)$ varie de 0 à $-\infty$ quand $-\infty<x<a_1$, $\varphi(x)$ varie de $+\infty$ à 0 quand $a_n<x<\infty$. On suppose ici que

$$a_1<a_2<\ldots<a_n.$$

725. $\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$, où x_k sont les zéros du polynôme $f(x)$. Par conséquent,

$$[f'(x)]^2-f(x)f''(x)=[f(x)]^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}>0$$

pour toutes les valeurs réelles de x.

726. Soient $x_1<x_2<\ldots<x_n$ les zéros du polynôme $f(x)$ et $y_1<$ $<y_2<\ldots<y_m$ les zéros du polynôme $\varphi(x)$.

Quand les conditions du problème sont vérifiées, $m=n$, $n-1$ ou $n+1$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots$ $\ldots<y_{n-1}<x_n$ ou $x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<y_{n-1}<x_n<y_n$. Nous admettons que $\lambda\neq 0$. Récrivons l'équation sous la forme

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Si $m=n$, $\psi(x)$ varie :

$$\text{de } \frac{a_0}{b_0} \text{ à } -\infty \text{ pour } -\infty<x<y_1, \text{ s'annulant pour } x=x_1\,;$$

$$\text{de } +\infty \text{ à } -\infty \text{ pour } y_k<x<y_{k+1}, \text{ s'annulant pour } x=x_{k+1}\,;$$

$$\text{de } +\infty \text{ à } \frac{a_0}{b_0} \text{ pour } y_n<x<+\infty.$$

Ici a_0 et b_0 sont les coefficients des termes principaux de $f(x)$ et $\varphi(x)$ que nous estimons positifs.

$\psi(x)$ étant continu dans chacun des intervalles considérés, l'équation $\psi(x)=-\frac{\mu}{\lambda}$ a n racines réelles si $-\frac{\mu}{\lambda}\neq\frac{a_0}{b_0}$ et $n-1$ racines réelles si $-\frac{\mu}{\lambda}=$ $=\frac{a_0}{b_0}$. Donc, le nombre de racines réelles de l'équation $\lambda f(x)+\mu\varphi(x)$ est égal au degré de cette équation.

On examine de façon analogue le cas $m=n-1$.

727. Les zéros de $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont nécessairement tous réels, puisque $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'obtiennent de $F(x)$ pour $\lambda=1$, $\mu=0$ et pour $\mu=1$, $\lambda=0$.

Supposons que les zéros de $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne se séparent pas. Sans restreindre la généralité, on peut admettre qu'entre deux zéros contigus x_1 et x_2 du polynôme $f(x)$ il n'y a pas de zéros de $\varphi(x)$. Alors $\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est continue pour $x_1\leqslant$ $\leqslant x\leqslant x_2$ et s'annule aux extrémités de cet intervalle. D'après le théorème de Rolle il y a à l'intérieur de (x_1, x_2) un point x_0 tel que $\psi'(x_0)=0$. Dans ce cas, $\psi(x)-\psi(x_0)$ admet x_0 comme zéro d'ordre de multiplicité $k\geqslant 2$. En vertu du résultat du problème n° 581, il y a sur la circonférence $|z-x_0|=\rho$, si ρ est suffisamment petit, au moins quatre points où $\operatorname{Im}(\psi(z))=\operatorname{Im}(\psi(x_0))=0$.

Parmi ces points l'un au moins z_0 n'est pas réel. Le nombre $\mu=\psi(z_0)$ est réel. Le polynôme $F(x)=-f(x)+\mu\varphi(x)$ possède un zéro non réel, ce qui contredit l'hypothèse.

728. Les zéros $\xi_1<\xi_2\ldots<\xi_{n-1}$ du polynôme $f'(x)$ divisent l'axe réel en n intervalles

$$(-\infty,\ \xi_1),\ (\xi_1,\ \xi_2),\ \ldots,\ (\xi_{n-2},\ \xi_{n-1}),\ (\xi_{n-1},\ \infty).$$

En vertu du théorème de Rolle, dans chacun de ces intervalles $f(x)$ a au plus un zéro. Ensuite, le polynôme $f'(x)+\lambda f''(x)$ pour chaque λ réel a au plus un zéro dans chacun des intervalles mentionnés. Par conséquent, $f(x)+\lambda f'(x)$, en vertu du théorème de Rolle, a au plus deux zéros dans chacun des intervalles, compte tenu de l'ordre de multiplicité.

Répartissons maintenant tous les intervalles en deux classes. Nous rapportons dans la première classe les intervalles dans lesquels $f(x)$ possède un zéro et dans la deuxième ceux dans lesquels $f(x)$ n'a pas de zéros. Considérons la fonction $\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Dans les intervalles de la première classe $\psi(x)$ a un zéro simple et, par conséquent, change de signe. Dans les intervalles de la deuxième classe $\psi(x)$ ne change pas de signe. Dans les intervalles de la première classe $\psi(x) + \lambda$ possède, compte tenu de l'ordre de multiplicité, un nombre impair de zéros. Par conséquent, en vertu de ce qui vient d'être dit, dans l'intervalle de la première classe $\psi(x) + \lambda$ n'a qu'un zéro simple et n'a pas de zéros multiples. Aussi $\psi'(x)$ n'a pas de zéros dans l'intervalle de la première classe. Examinons maintenant les intervalles de la deuxième classe. Soit ξ_0 un point dans un certain intervalle de la deuxième classe, en lequel la valeur absolue de $\psi(x)$ admet un minimum et soit $\lambda_0 = \psi(\xi_0)$. Pour fixer les idées nous supposerons $\psi(x)$ positif dans cet intervalle. Donc, la fonction $\psi(x) - \lambda$ n'a pas de zéros dans l'intervalle qui nous intéresse pour $\lambda < \lambda_0$ et possède au moins deux zéros pour $\lambda > \lambda_0$.

En vertu de ce qui vient d'être dit, le nombre de zéros de $\psi(x) - \lambda$ est exactement égal à deux pour $\lambda > \lambda_0$ et les deux zéros sont simples. Ensuite $\psi(x) - \lambda_0$ a ξ_0 comme zéro multiple, plus précisément comme zéro double.

Ainsi, $\psi(x) - \lambda$ n'a pas de zéros multiples dans les intervalles de la première classe et possède seulement un zéro multiple pour une valeur de λ dans chaque intervalle de la deuxième classe. Ensuite, chaque zéro η du polynôme $f'^2(x) - f(x) f''(x)$ est un zéro multiple de $\psi(x) - \psi(\eta)$, car

$$[\psi(x)]' = \frac{f'^2(x) - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Donc, le nombre de zéros réels de $f'^2(x) - f(x) f''(x)$ est égal au nombre d'intervalles de la deuxième classe, qui est évidemment égal au nombre de zéros complexes de $f(x)$.

729. $\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)$ a tous ses zéros réels pour n'importe quelles constantes réelles λ et μ (problème n° 726). Par conséquent, en vertu du théorème de Rolle, $\lambda f_1'(x) + \mu f_2'(x)$ a tous ses zéros réels. Il en résulte que (problème n° 727) les zéros de $f_1'(x)$ et $f_2'(x)$ sont séparables.

730. Supposons que $f(x)$ n'a pas de zéros multiples et que $\xi_1 < \xi_2 < \ldots$ $\ldots < \xi_{n-1}$ sont les zéros de $f'(x)$. Considérons la fonction $\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{(x+\lambda)}{\gamma}$.

Il est évident que $\lim\limits_{x \leftarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\gamma} > 0$ si $\gamma > 0$ ou si $\gamma < -n$. Il en découle que $\psi(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$ et que $\psi(x) \to -\infty$ pour $x \to -\infty$. En outre, $\psi(x) \to -\infty$ pour $x \to \xi_i$ à droite et $\psi(x) \to +\infty$ pour $x \to \xi_i$ à gauche. Ainsi, $\psi(x)$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ dans chacun des intervalles $(-\infty, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2), $\ldots$ $\ldots$, (ξ_{n-1}, ∞) tout en restant continue à l'intérieur de ces intervalles.

Par conséquent, $\psi(x)$ et avec elle son numérateur $\gamma f(x) + (x + \lambda) f'(x)$ a au moins n zéros distincts pour $\gamma > 0$ ou $\gamma < -n$. Mais le nombre de zéros de $\gamma f(x) + (x + \lambda) f'(x)$ n'est pas supérieur à n, car $\gamma f(x) + (x + \lambda) f'(x)$ est un polynôme de degré n. Si $f(x)$ a des zéros multiples et si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont les différents zéros de $f(x)$, alors $f'(x)$ a $k - 1$ zéros ξ, $\xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$, différents de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Par un raisonnement analogue au précédent on s'assure de l'existence de k zéros de $\psi(x)$. Tous ces zéros, excepté $-\lambda$, si $-\lambda$ est parmi les zéros de $f(x)$, sont différents des zéros de $f(x)$.

Outre ces zéros $\gamma f(x) + (x + \lambda) f'(x)$ a comme zéros $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec pour somme des ordres de multiplicité $n-k$ (si $-\lambda$ n'est pas un zéro de $f(x)$) ou $n - k + 1$ (si $-\lambda$ est un zéro de $f(x)$).

Le nombre total de zéros réels de $\gamma f(x) + (\lambda + x) f'(x)$, compte tenu des ordres de multiplicité, est de nouveau égal à n.

731. Soit $\varphi(x) = b_k(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\ldots(x+\gamma_k)$. Chaque γ_i est soit supérieur à zéro, soit inférieur à $-n$.

Il est évident que les coefficients du polynôme

$$F_1(x) = \gamma_1 f(x) + xf'(x) \text{ sont } a_i(\gamma_1 + i).$$

Les coefficients du polynôme

$$F_2(x) = \gamma_2 F_1(x) + xF_1'(x) \text{ sont } a_i(\gamma_1+i)(\gamma_2+i)$$

et ainsi de suite, les coefficients du polynôme

$$F_k(x) = \gamma_k F_{k-1}(x) + xF'_{k-1}(x)$$

sont

$$a_i(\gamma_1+i)(\gamma_2+i)\ldots(\gamma_k+i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

En vertu du résultat du problème nº 730, tous les zéros de tous les polynômes $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont réels. Or

$$a_0\varphi(0) + a_1\varphi(1)x + \ldots + a_n\varphi(n)x^n = b_kF_k(x).$$

732. Soit $f(x) = f_1(x)(x+\lambda)$ où λ est un nombre réel, et $f_1(x)$ un polynôme du $(n-1)^{\text{ème}}$ degré, dont tous les zéros sont réels. Supposons que pour les polynômes du $(n-1)^{\text{ème}}$ degré le théorème est vrai et avec cette supposition démontrons qu'il est encore vrai pour les polynômes de degré n.

Soit

$$f_1(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}.$$
$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda b_0, \\ a_1 &= \lambda b_1 + b_0, \\ a_2 &= \lambda b_2 + b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= \lambda b_{n-1} + b_{n-2}, \\ a_n &= \qquad\quad b_{n-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_0 &+ a_1\gamma x + a_2\gamma(\gamma-1)x^2 + \ldots + a_n\gamma(\gamma-1)\ldots \\ &\ldots(\gamma-n+1)x^n = \lambda[b_0 + b_1\gamma x + b_2\gamma(\gamma-1)x^2 + \ldots \\ &\ldots + b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+2)x^{n-1}] + x\gamma[b_0 + \\ &+ b_1(\gamma-1)x + b_2(\gamma-1)(\gamma-2)x^2 + \ldots + b_{n-1}(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots \\ &\ldots(\gamma-n+1)x^{n-1}] = \lambda\varphi(x) + x[\gamma\varphi(x) - x\varphi'(x)], \end{aligned}$$

où on a désigné par $\varphi(x)$ le polynôme

$$b_0 + b_1\gamma x + b_2\gamma(\gamma-1)x^2 + \ldots + b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+2)x^{n-1}.$$

En vertu de la supposition faite, tous les zéros du polynôme $\varphi(x)$ sont réels. Il reste à démontrer le lemme suivant.

L e m m e. Si $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $(n-1)$ qui possède uniquement des zéros réels, tous les zéros du polynôme $\psi(x) = \lambda\varphi + \gamma x\varphi - x^2\varphi'$ sont réels pour $\gamma > n-1$ et pour tout λ réel.

D é m o n s t r a t i o n. Sans restreindre la généralité on peut supposer que 0 n'est pas un zéro de $\varphi(x)$, car si $\varphi = x^k\varphi_1$, $\varphi_1(0) \neq 0$, on a

$$\psi(x) = x^k(\lambda\varphi_1 + (\gamma-k)x\varphi_1 - x^2\varphi_1') = x^k\psi_1$$

et $\gamma_1 = \gamma - k$ est supérieur au degré de φ_1.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les différents zéros de φ. Le polynôme ψ a parmi ses zéros $x_1, x_2, \ldots, x_m$ avec une somme des ordres de multiplicité $n-1-m$. Considérons maintenant

$$w(x)=\lambda+\gamma x-\frac{x^2\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Il est évident que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{w(x)}{x}=\gamma-(n-1)>0.$$

Par conséquent, $w(x)\to-\infty$ pour $x\to-\infty$ et $w(x)\to+\infty$ pour $x\to+\infty$. En outre, $w(x)\to+\infty$ pour $x\to x_i$ à gauche et $w(x)\to-\infty$ pour $x\to x_i$ à droite. C'est pourquoi $w(x)$ a des zéros dans chacun des intervalles

$$(-\infty,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ \ldots,\ (x_{m-1},\ x_m),\ (x_m,\ +\infty).$$

Le nombre total de zéros réels de $\psi(x)$, compte tenu de l'ordre de multiplicité, est égal à $n-1-m+m+1=n$, c'est-à-dire au degré de $\psi(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

733. Si tous les zéros du polynôme $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ sont réels, tous les zéros du polynôme $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ le sont également. Ensuite, tous les zéros des polynômes

$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1)x^n+a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots$$
$$\ldots(\gamma_1-n+2)x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\gamma_1x+a_n$$

et

$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1)+a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+2)x+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}\gamma_1x^{n-1}+a_nx^n=$$
$$=\left[a_0+\frac{a_1}{\gamma_1-n+1}x+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots(\gamma_1-1)}x^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_n}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots\gamma_1}x^n\right]\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1-n+1)$$

sont réels pour $\gamma_1>n-1$. Posant $\gamma_1-n+1=\alpha>0$, nous obtenons que tous les zéros du polynôme

$$a_0+\frac{a_1}{\alpha}x+\frac{a_2}{\alpha(\alpha+1)}x^2+\ldots+\frac{a_n}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}x^n$$

sont réels. Appliquant encore une fois le résultat du problème n° 732, nous obtenons le résultat recherché.

734. 1. Supposons que tous les zéros de $f(x)$ sont positifs. Alors, le polynôme $a_0+a_1wx+\ldots+a_nw^{n^2}x^n$ ne peut pas avoir de zéros négatifs. Supposons que le théorème est vrai pour les polynômes de degré $n-1$. Posons

$$\varphi(x)=b_0+b_1wx+b_2w^4x^2+\ldots+b_{n-1}w^{(n-1)^2}x^{n-1}.$$

Soit $0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$, où $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont les zéros de $\varphi(x)$, et soit $\frac{x_i}{x_{i-1}}>w^{-2}$.

Soit ensuite $f(x)=(\lambda-x)(b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1})$. Les coefficients du polynôme $f(x)$ sont égaux à

$$\begin{aligned}a_0&=\lambda b_0,\\ a_1&=\lambda b_1-b_0,\\ a_2&=\lambda b_2-b_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_{n-1}&=\lambda b_{n-1}-b_{n-2},\\ a_n&=-b_{n-1}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\psi(x) = a_0 + a_1 wx + a_2 w^4 x^2 + \ldots + a_n w^{n^2} x^n =$$
$$= \lambda (b_0 + b_1 wx + \ldots + b_{n-1} w^{(n-1)^2} x^{n-1}) -$$
$$- x (b_0 w + b_1 w^4 x + \ldots + b_{n-1} w^{n^2} x^{n-1}) = \lambda\varphi(x) - xw\varphi(xw^2).$$

Les zéros des polynômes $\varphi(x)$ et $x\varphi(xw^2)$ se séparent en vertu de l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, tous les zéros du polynôme $\lambda\varphi(x) + xw\varphi(xw^2)$ qui nous intéresse sont réels. Il reste à vérifier que la loi de leur distribution est la même que pour le polynôme $\varphi(x)$.

Désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les zéros de $\psi(x)$. Il est facile de voir que

$$0 < z_1 < x_1 < x_1 w^{-2} < z_2 < x_2 < x_2 w^{-2} < z_3 < \ldots$$
$$\ldots < z_{n-1} < x_{n-1} < x_{n-1} w^{-2} < z_n.$$

Il en résulte que $\dfrac{z_i}{z_{i-1}} > \dfrac{x_{i-1} w^{-2}}{x_{i-1}} = w^{-2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Considérons $\varphi_m(x) = \left(1 - \dfrac{x^2 \lg \frac{1}{w}}{m}\right)^m$.

Quand m est suffisamment grand, les zéros du polynôme $\varphi_m(x)$, égaux à $\pm\sqrt{\dfrac{m}{\lg \frac{1}{w}}}$, ne sont pas contenus dans l'intervalle $(0, n)$. Par conséquent (problème n° 731), tous les zéros du polynôme $a_0\varphi_m(0) + a_1\varphi_m(1)x + \ldots + a_n\varphi_m(n)x^n$ sont réels. Mais $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = w^{x^2}$. Par conséquent, en vertu de la continuité des zéros comme fonctions des coefficients, tous les zéros de $a_0 + a_1 wx + \ldots + a_n w^{n^2} x^n$ sont réels.

735. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros du polynôme $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Sans restreindre la généralité on peut les supposer positifs. Soit ensuite

$$\varphi(x) = a_0 \cos\varphi + a_1 \cos(\varphi + \theta)\, x + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta)\, x^n,$$
$$\psi(x) = a_0 \sin\varphi + a_1 \sin(\varphi + \theta)\, x + \ldots + a_n \sin(\varphi + n\theta)\, x^n.$$

Alors

$$\varphi(x) + i\psi(x) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, a_n \prod_{i=1}^{n} (\alpha x - x_i),$$

$$\varphi(x) - i\psi(x) = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\, a_n \prod_{i=1}^{n} (\alpha' x - x_i),$$

où

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \alpha' = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Par conséquent,

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x) + i\psi(x)}{\varphi(x) - i\psi(x)} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x - x_i}{\alpha' x - x_i}.$$

Soit $x=\rho\beta$ un zéro du polynôme $\varphi(x)$. Ici $\rho=|x|$; $\beta=\cos\lambda+i\sin\lambda$. Alors $|\Phi(x)|=1$ et, par conséquent,

$$\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{\rho\alpha\beta-x_i}{\rho\alpha'\beta-x_i}\right|=1,$$

mais

$$\left|\frac{\rho\alpha\beta-x_i}{\rho\alpha'\beta-x_i}\right|^2=\frac{(\rho\alpha\beta-x_i)(\rho\alpha'\beta'-x_i)}{(\rho\alpha'\beta-x_i)(\rho\alpha\beta'-x_i)}=$$
$$=1+\frac{\rho x_i(\alpha-\alpha')(\beta'-\beta)}{|\rho\alpha'\beta-x_i|^2}=1+\frac{4\rho x_i\sin\theta\sin\lambda}{|\rho\alpha'\beta-x_i|^2}.$$

Laissons de côté le cas peu intéressant $\sin\theta=0$.

Si $\sin\lambda\neq 0$, tous les $\left|\frac{\rho\alpha\beta-x_i}{\rho\alpha'\beta-x_i}\right|^2$ sont simultanément supérieurs à l'unité ou simultanément inférieurs à l'unité, et leur produit ne peut être égal à 1. Par conséquent, $\sin\lambda=0$, c'est-à-dire que x est réel.

736. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros du polynôme

$$f(x)=a_0+ib_0+(a_1+ib_1)x+\ldots+(a_n+ib_n)x^n=\varphi(x)+i\psi(x).$$

Les parties imaginaires de ces zéros sont positives. Considérons le polynôme $\overline{f}(x)=\varphi(x)-i\psi(x)$. Ses zéros sont évidemment $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ conjugués de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alors

$$\Phi(x)=\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{x-x_i'}\cdot\frac{a_n+ib_n}{a_n-ib_n}.$$

Si x_0 est un zéro de $\varphi(x)$, on a

$$|\Phi(x_0)|=\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|=1.$$

Mais

$$\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|^2=\frac{(x_0-x_i)(x_0'-x_i')}{(x_0-x_i')(x_0'-x_i)}=1+\frac{(x_i-x_i')(x_0-x_0')}{|x_0-x_i|^2}=1-\frac{4\,\mathrm{Im}(x_0)\,\mathrm{Im}(x_i)}{|x_0-x_i'|^2}.$$

D'où, si $\mathrm{Im}(x_0)>0$, on a $\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|<1$ pour tous les i; si $\mathrm{Im}(x_0)<0$, on a $\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|>1$ pour tous les i. (Il est facile d'obtenir géométriquement le même résultat, sans faire des calculs.) Par conséquent, l'égalité $|\Phi(x_0)|=1$ est possible uniquement pour x_0 réel et c'est pourquoi tous les zéros de $\varphi(x)$ sont réels.

Considérons ensuite le polynôme

$$(\alpha-\beta i)[\varphi(x)+i\psi(x)]=\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)+i[\alpha\psi(x)-\beta\varphi(x)].$$

Ses zéros ne diffèrent pas des zéros du polynôme initial de sorte que sa partie réelle $\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ n'a que des zéros réels pour α et β réels arbitraires. Mais dans ce cas, les zéros de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ sont séparables (problème n° 727).

737. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros de $\varphi(x)$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les zéros de $\psi(x)$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que les coefficients des termes principaux de φ et ψ sont positifs et

$$x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots > y_{n-1} > x_n > y_n$$

(y_n peut être absent).

Décomposons $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ en éléments simples

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = A + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}; \quad A_k = \frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

On voit aisément que tous les $A_k > 0$. Posons $x = a + bi$ et trouvons la partie imaginaire de

$$\frac{-i(\varphi(x) + i\psi(x))}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i;$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i\right) = -1 + \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a + bi - x_k}\right) = -1 - b\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(a - x_k)^2 + b^2}.$$

Si $b \geqslant 0$, on a $\operatorname{Im}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i\right) < 0$ et, par conséquent, $\varphi(x) + i\psi(x) \neq 0$. Ainsi, dans le cas considéré tous les zéros de $\varphi(x) + i\psi(x)$ se trouvent dans le demi-plan inférieur. De façon analogue, on considère les autres cas de distribution des zéros.

738.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}; \quad x_k \text{ sont les zéros de } f(x).$$

Soit $x = a - bi$, $b > 0$. Alors

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f'(a - bi)}{f(a - bi)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b + \operatorname{Im}(x_k)}{|x - x_k|^2} > 0.$$

Par conséquent,

$$f'(a - bi) \neq 0.$$

739. Supposons que le demi-plan est donné par l'inégalité

$$r\cos(\theta - \varphi) > p, \quad \text{où} \quad x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Posons $x = (x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)$. Alors

$$x' = -pi + x(\sin\theta + i\cos\theta) = r\sin(\theta - \varphi) + i[r\cos(\theta - \varphi) - p].$$

Il en découle que si x se trouve dans le demi-plan donné, x' se trouve dans le demi-plan $\operatorname{Im}(x') > 0$ et inversement. Ainsi les zéros du polynôme $f[(x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)]$ sont situés dans le demi-plan supérieur. D'après le problème n° 738, les zéros de sa dérivée égale à $[\sin\theta - i\cos\theta] \times f'[(x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)]$ se trouvent aussi dans le demi-plan supérieur.

Par conséquent, les zéros du polynôme $f'(x)$ se trouvent dans le demi-plan donné.

740. Découle immédiatement du résultat du problème n° 739.

741. L'équation se décompose en deux équations:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{ki}=0 \text{ et } \frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{ki}=0.$$

La décomposition en éléments simples donne:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\pm\frac{1}{ki}=0,$$

x_k, les zéros de $f(x)$, sont par hypothèse réels. Soit $x=a+bi$; alors

$$\left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)\right|=|b|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a-x_k)^2+b^2}<\frac{n}{|b|}.$$

Pour les racines de chaque équation il faut que $\frac{1}{k}<\frac{n}{|b|}$, d'où $|b|<kn$.

742. Tous les zéros de $f'(x)$ sont évidemment réels. Désignons-les par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. Ensuite, désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les zéros du polynôme $f(x)-b$, par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros du polynôme $f(x)-a$. Alors

$$y_1<\xi_1<y_2<\xi_2<\ldots<y_{n-1}<\xi_{n-1}<y_n,$$

$$x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<\ldots<x_{n-1}<\xi_{n-1}<x_n.$$

Il découle de ces inégalités que les intervalles bornés par les points x_i, y_i ne se recouvrent pas, car ils sont compris dans les intervalles ne se recouvrant pas

$$(-\infty, \xi_1);\ (\xi_1, \xi_2);\ \ldots;\ (\xi_{n-1}, +\infty).$$

Le polynôme $f(x)$ admet aux extrémités de chacun des intervalles considérés les valeurs a et b et parcourt, à l'intérieur de l'intervalle, toutes les valeurs intermédiaires. Par conséquent, $f(x)-\lambda$ s'annule n fois sur l'axe réel, ce qu'il fallait démontrer.

743. Si les parties réelles des zéros du polynôme $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_n$ sont de même signe, les parties imaginaires des zéros du polynôme

$$i^nf(-ix)=x^n+ia_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-ia_3x^{n-3}+\ldots$$

sont, elles aussi, de même signe et inversement.

En vertu du résultat des problèmes n^os^ 736, 737, pour cela il faut et il suffit que les zéros des polynômes $x^n-a_2x^{n-2}+a_4x^{n-4}-\ldots$ et $a_1x^{n-1}-$ $-a_3x^{n-3}+a_5x^{n-5}-\ldots$ soient réels et séparables.

744. Il faut que $a>0$ et que les zéros des polynômes x^3-bx et ax^2-c soient réels et séparables. Pour cela il faut et il suffit que $0<\frac{c}{a}<b$ ou $c>0$, $ab-c>0$.

Donc, pour que les parties réelles de toutes les racines de l'équation

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

soient négatives, il faut et il suffit que soient vérifiées les inégalités $a>0$, $c>0$, $ab-c>0$.

745. $a>0,\ c>0,\ d>0,\ abc-c^2-a^2d>0$.

746. Posons $x=\frac{1+y}{1-y}$. Il est facile de voir que si $|x|<1$, la partie réelle de y est négative et inversement.

Par conséquent, pour que toutes les racines x_1, x_2, x_3 de l'équation $f(x) = 0$ soient en module inférieures à l'unité, il faut et il suffit que toutes les racines de l'équation $f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 0$ aient les parties réelles négatives. Cette équation est de la forme

$$y^3(1-a+b-c) + y^2(3-a-b+3c) + y(3+a-b-3c) + \\ + (1+a+b+c) = 0.$$

Il est facile de voir, en outre, que la condition suivante:

$$1-a+b-c = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) > 0,$$

est nécessaire. En se basant sur le résultat du problème nº 744, nous obtenons les conditions nécessaires et suffisantes:

$$1-a+b-c > 0; \quad 1+a+b+c > 0;$$
$$3-a-b+3c > 0; \; 1-b+ac-c^2 > 0.$$

747. $f(x)(1-x) = a_n + (a_{n-1}-a_n)x + (a_{n-2}-a_{n-1})x^2 + \ldots$
$$\ldots + (a_0-a_1)x^n - a_0x^{n+1}.$$

Soit $|x| = \rho > 1$. Alors

$$|f(x)(1-x)| \geqslant a_0\rho^{n+1} - |a_n + (a_{n-1}-a_n)x + \ldots$$
$$\ldots + (a_0-a_1)x^n| \geqslant a_0\rho^{n+1} - \rho^n(a_n + a_{n-1} - a_n + \ldots$$
$$\ldots + a_0 - a_1) = a_0(\rho^{n+1} - \rho^n) > 0.$$

Par conséquent, $f(x) \neq 0$ pour $|x| > 1$.

748. $-0,6618$. **749.** $2,094551$.

750. a) $3,3876$, $-0,5136$, $-2,8741$;
b) $2,8931$;
c) $3,9489$, $0,2172$, $-1,1660$;
d) $3,1149$, $0,7459$, $-0,8608$.

751. Le problème se ramène au calcul de la racine de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, contenue dans l'intervalle $(0, 1)$.

Réponse: $x = 0,347$ (avec une précision de 0,001).

752. $2,4908$.

753. a) $1,7320$; b) $-0,7321$; c) $0,6180$;
d) $0,2679$; e) $-3,1623$; f) $1,2361$;
g) $-2,3028$; h) $3,6457$; i) $1,6180$.

754. a) $1,0953$; $-0,2624$, $-1,4773$, $-2,3556$;
b) $0,8270$, $0,3383$, $-1,2090$, $-2,9563$;
c) $1,4689$, $0,1168$;
d) $8,0060$, $1,2855$, $0,1960$, $-1,4875$;
e) $1,5357$, $-0,1537$;
f) $3,3322$, $1,0947$, $-0,6002$, $-1,8268$;
g) $0,4910$, $-1,4910$;
h) $2,1462$, $-0,6821$, $-1,3178$, $-4,1463$.

Chapitre 6

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

755. Nous donnons la résolution détaillée de l'exercice f):

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2).$$

Le terme principal du polynôme F est égal à $x_1^4 \cdot x_2^2$.

Relevons les exposants dans les termes principaux des polynômes qui subsisteront après l'élimination successive des termes principaux par soustraction des combinaisons appropriées de polynômes symétriques fondamentaux. Ces exposants sont:

$$(4,\ 2,\ 0);\ (4,\ 1,\ 1);\ (3,\ 3,\ 0);\ (3,\ 2,\ 1)\ \text{et}\ (2,\ 2,\ 2).$$

Par conséquent, $F = f_1^2 f_2^2 + A f_1^3 f_3 + B f_2^3 + C f_1 f_2 f_3 + D f_3^2$, où A, B, C, D sont des coefficients numériques. Nous les déterminons en donnant à x_1, x_2, x_3 des valeurs particulières.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	F
1	1	0	2	1	0	2
2	-1	-1	0	-3	2	50
1	-2	-2	-3	0	4	200
1	-1	-1	-1	-1	1	8

Pour déterminer A, B, C, D nous obtenons le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} 2 &= 4 + B, \\ 50 &= -27B + 4D, \\ 200 &= -108A + 16D, \\ 8 &= 1 - A - B + C + D, \end{aligned}$$

d'où

$$B = -2,\ D = -1,\ A = -2,\ C = 4.$$

Donc

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2) = f_1^2 f_2^2 - 2f_1^3 f_3 - 2f_2^3 + 4f_1 f_2 f_3 - f_3^2.$$

Nous donnons les réponses des autres exercices:

a) $f_1^3 - 3f_1 f_2$; b) $f_1 f_2 - 3f_3$; c) $f_1^4 - 4f_1^2 f_2 + 8f_1 f_3$;
d) $f_1^3 f_2^2 - 2f_1^4 f_3 - 3f_1 f_2^3 + 6f_1^2 f_2 f_3 + 3f_2^2 f_3 - 7f_1 f_3^2$;
e) $f_1 f_2 - f_3$; g) $2f_1^3 - 9f_1 f_2 + 27f_3$;
h) $f_1^2 f_2^2 - 4f_1^3 f_3 - 4f_2^3 + 18f_1 f_2 f_3 - 27f_3^2$.

756. a) $f_1 f_2 f_3 - f_1^2 f_4 - f_3^2$; b) $f_1^2 f_4 + f_3^2 - 4f_2 f_4$;
c) $f_1^3 - 4f_1 f_2 + 8f_3$.

757. a) $f_1^2 - 2f_2$; b) $f_1^3 - 3f_1 f_2 + 3f_3$;
c) $f_1 f_3 - 4f_4$; d) $f_2^2 - 2f_1 f_3 + 2f_4$;
e) $f_1^2 f_2 - f_1 f_3 - 2f_2^2 + 4f_4$; f) $f_1^4 - 4f_1^2 f_2 + 2f_2^2 + 4f_1 f_3 - 4f_4$;

g) $f_2f_3-3f_1f_4+5f_5$; h) $f_1^2f_3-2f_2f_3-f_1f_4+5f_5$;
i) $f_1f_2^2-2f_1^2f_3-f_2f_3+5f_1f_4-5f_5$;
j) $f_1^3f_2-3f_1f_2^2-f_1^2f_3+5f_2f_3+f_1f_4-5f_5$;
k) $f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1f_2^2+5f_1^2f_3-5f_2f_3-5f_1f_4+5f_5$;
l) $f_2f_4-4f_1f_5+9f_6$; m) $f_3^2-2f_2f_4+2f_1f_5-2f_6$;
n) $f_1^2f_4-2f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;
o) $f_1f_2f_3-3f_1^2f_4-3f_3^2+4f_2f_4+7f_1f_5-12f_6$;
p) $f_2^3-3f_1f_2f_3+3f_1^2f_4+3f_3^2-3f_2f_4-3f_1f_5+3f_6$;
q) $f_1^3f_3-3f_1f_2f_3-f_1^2f_4+3f_3^2+2f_2f_4+f_1f_5-6f_6$;
r) $f_1^2f_2^2-2f_1^3f_3-2f_2^3+4f_1f_2f_3+2f_1^2f_4-3f_3^2+2f_2f_4-6f_1f_5+6f_6$;
s) $f_1^4f_2-4f_1^2f_2^2-f_1^3f_3+2f_2^3+7f_1f_2f_3+f_1^2f_4-3f_3^2-6f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;
t) $f_1^6-6f_1^4f_2+9f_1^2f_2^2+6f_1^3f_3-2f_2^3-12f_1f_2f_3-6f_1^2f_4+3f_3^2+$
$+6f_2f_4+6f_1f_5-6f_6$.

758. a) $nf_1^2-8f_2$;
b) $-f_1^n+4f_1^{n-2}f_2-8f_1^{n-3}f_3+\ldots+(-2)^nf_n$.

759. a) $(n-1)f_1^2-2nf_2$; b) $(n-1)f_1^3-3(n-2)f_1f_2+3(n-4)f_3$;
c) $(n-1)f_1^4-4nf_1^2f_2+2(n+6)f_2^2+4(n-3)f_1f_3-4nf_4$;
d) $\dfrac{3(n-1)(n-2)}{2}f_1^2-(3n-1)(n-2)f_2$.

760. $f_k^2-2f_{k-1}f_{k+1}+2f_{k-2}f_{k+2}-2f_{k-3}f_{k+3}+\ldots$

761. $$(n-1)!\sum_{i=1}^n a_i^2f_1^2-2(n-2)!\left[n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right]f_2=$$
$$=(n-1)!\ S_2s_2+4(n-2)!\ F_2f_2,$$

où

$$S_2=\sum_{i=1}^n a_i^2;\quad s_2=\sum_{i=1}^n x_i^2;\quad F_2=\sum_{i<k}a_ia_k;\quad f_2=\sum_{i<k}x_ix_k.$$

762. a) $\dfrac{f_1f_2-3f_3}{f_3}$; b) $\dfrac{2(f_1^2f_2-3f_1f_3-2f_2^2)}{f_1f_2-f_3}$;
c) $\dfrac{f_2^3+f_1^3f_3-6f_1f_2f_3+9f_3^2}{f_3^2}$.

763. a) $\dfrac{f_2^2-2f_1f_3+2f_4}{f_4}$; b) $\dfrac{f_1^2f_2^2+f_1^3f_3-6f_1f_2f_3+6f_3^2+2f_1^2f_4}{f_1f_2f_3-f_1^2f_4-f_3^2}$.

764. a) $\dfrac{f_{n-1}}{f_n}$; b) $\dfrac{f_{n-1}^2-2f_{n-2}f_n}{f_n^2}$; c) $\dfrac{f_1f_{n-1}-nf_n}{f_n}$;
d) $\dfrac{f_1^2f_{n-1}^2-2f_2f_{n-1}^2-2f_1^2f_{n-2}f_n+4f_2f_{n-2}f_n-nf_n^2}{f_n^2}$;
e) $\dfrac{f_1^2f_{n-1}-2f_2f_{n-1}-f_1f_n}{f_n}$; f) $\dfrac{f_2f_{n-1}-(n-1)f_1f_n}{f_n}$.

765. -4. 766. -35. 767. 16.

768. a) -3; b) $-2p^3-3q^2$; c) $-p^3\ (x_1^2-x_2x_3=-p)$;
d) q^4; e) $\dfrac{-2p-3q}{1+p-q}$; f) $\dfrac{2p^2-4p-4pq+3q^2+6q}{(1+p-q)^2}$.

769. Soit $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$. Alors $2x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b$. Par conséquent, $\sqrt{\frac{a^2-2b}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{a^2-2b}{2}}$ se trouve au nombre des racines de l'équation donnée. Pour cela il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée:

$$a^4 (a^2 - 2b) = 2 (a^3 - 2ab + 2c)^2.$$

770.

$$a = -x_1 - x_2 - x_3,$$
$$ab - c = -(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3),$$
$$c = -x_1x_2x_3.$$

Si toutes les racines sont réelles et négatives, on a

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Si l'une des racines x_1 est réelle, alors que x_2 et x_3 sont complexes conjuguées avec une partie réelle négative, on a $x_2 + x_3 < 0$, $x_2x_3 > 0$, $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) > 0$ et, par conséquent, aussi $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. La nécessité des conditions est démontrée.

Supposons maintenant que $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Si x_1 est réelle et x_2 et x_3 complexes conjuguées, on a $x_2x_3 > 0$, $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) > 0$, et de $c > 0$, $b > 0$ il découle que $x_1 < 0$, $2\operatorname{Re}(x_2) = x_2 + x_3 < 0$.

Si x_1, x_2, x_3 sont réelles, il découle de $c > 0$ que l'une des racines x_1 est négative et que les deux autres sont de même signe. Si $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, on a $-x_1 - x_2 > x_3 > 0$, $-x_1 - x_3 > x_2 > 0$ et alors $-(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) \times$ $\times (x_2 + x_3) < 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$. Une autre solution est donnée au problème nº 744.

771. $s = \frac{1}{4}\sqrt{a(4ab-a^3-bc)}$, $R = \frac{c}{\sqrt{a(4ab-a^3-bc)}}$.

772. $a(4ab-a^3-8c) = 4c^2$.

773. a) $\frac{25}{27}$; b) $\frac{35}{27}$; c) $-\frac{1679}{625}$.

774. a) $a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3a_0 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$;

b) $a_1^3a_3 - a_2^3a_0$; c) $\frac{a_1a_2}{a_0a_3} - 9$; d) $a_1^2a_2^2 - a_1^3a_3 - a_2^3a_0$.

775. Il suffit de le démontrer pour les polynômes symétriques fondamentaux. Soient φ_k une fonction symétrique fondamentale en $x_2, x_3, \ldots, x_n$ de degré k et f_k une fonction symétrique fondamentale en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il est évident que $\varphi_k = f_k - x_1\varphi_{k-1}$, d'où il découle que

$$\varphi_k = f_k - x_1f_{k-1} + x_1^2f_{k-2} - \ldots + (-x_1)^{k-1}f_1 + (-1)^k x_1^k,$$
$$(-1)^k \varphi_k = a_k + a_{k-1}x_1 + \ldots + a_1x_1^{k-1} + x_1^k.$$

776.

$$x_1 + x_2 = f_1 - x_3;$$
$$(f_1 - x_1)(f_1 - x_2)(f_1 - x_3) = f_1^3 - f_1^3 + f_1f_2 - f_3 = f_1f_2 - f_3;$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3x_1 - f_1;$$
$$(3x_1 - f_1)(3x_2 - f_1)(3x_3 - f_1) = 27f_3 - 9f_1f_2 + 2f_1^3;$$
$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = f_1^2 - f_2 - f_1x_3;$$
$$x_1^2 - x_2x_3 = f_1x_1 - f_2.$$

777. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = (n-k) f_{k-1}$.

778. Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = n \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} + (n-1) f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} + \ldots + f_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial f_n}.$$

779. Soit $\varphi(a) = F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a)$. Alors

$$\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a)}{\partial x_i}.$$

Puisque $\varphi(a)$ ne dépend pas de a, on a $\varphi'(a) = 0$ identiquement, d'où il découle que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$. Inversement, si $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0$ identiquement, on a

$$\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1 + a, \ldots, x_n + a)}{\partial x_i} = 0,$$

d'où il découle que $\varphi(a)$ ne dépend pas de a et $\varphi(a) = \varphi(0)$, c'est-à-dire que

$$F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

En vertu du problème précédent, la condition $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ est équivalente à la condition

$$n \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} + (n-1) f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} + \ldots + f_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial f_n} = 0.$$

780. Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme symétrique homogène du deuxième degré. Il s'exprime par des polynômes symétriques fondamentaux sous la forme $\Phi = Af_1^2 + Bf_2$. En vertu du résultat du problème n° 779, on doit avoir $n \cdot 2Af_1 + (n-1) Bf_1 = 0$, d'où $A = (n-1)\alpha$, $B = -2n\alpha$ et

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha [(n-1) f_1^2 - 2nf_2] = \alpha \sum_{i<k} (x_i - x_k)^2.$$

781. L'expression d'un polynôme symétrique homogène du troisième degré à l'aide des polynômes fondamentaux est de la forme $Af_1^3 + Bf_1f_2 + Cf_3$. En vertu du résultat du problème n° 779 on doit avoir $3Anf_1^2 + nBf_2 + (n-1) Bf_1^2 + (n-2) Cf_2 = 0$, d'où

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha [(n-1)(n-2) f_1^3 - 3n(n-2) f_1f_2 + 3n^2f_3].$$

782. $(n-2) f_1^2f_2^2 - 2(n-1) f_1^3f_3 - 4(n-2) f_2^3 + (10n-12) f_1f_2f_3 - 4(n-1) \times f_1^2f_4 - 9nf_3^2 + 8nf_2f_4$.

783. On peut prendre

$$\varphi_k = f_k \left(x_1 - \frac{f_1}{n}, \; x_2 - \frac{f_1}{n}, \; \ldots, x_n - \frac{f_1}{n}\right).$$

Chaque fonction φ_k possède la propriété exigée. Ensuite, si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a)$ et $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, on a

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(0, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n).$$

784. a) $-4\varphi_2^3 - 27\varphi_3^2$; b) $18\varphi_2^2$.

785. a) $8\varphi_3$; b) $-4\varphi_2^3\varphi_3^2+16\varphi_2^4\varphi_4-27\varphi_3^4+144\varphi_2\varphi_3^2\varphi_4-128\varphi_2^2\varphi_4^2+256\varphi_4^3$.

786. $s_2=f_1^2-2f_2$;

$s_3=f_1^3-3f_1f_2+3f_3$;

$s_4=f_1^4-4f_1^2f_2+2f_2^2+4f_1f_3-4f_4$;

$s_5=f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1f_2^2+5f_1^2f_3-5f_2f_3-5f_1f_4+5f_5$;

$s_6=f_1^6-6f_1^4f_2+9f_1^2f_2^2+6f_1^3f_3-2f_2^3-12f_1f_2f_3-6f_1^2f_4+3f_3^2+6f_2f_4+$

$+6f_1f_5-6f_6$.

787. $2f_2=s_1^2-s_2$;

$6f_3=s_1^3-3s_1s_2+2s_3$;

$24f_4=s_1^4-6s_1^2s_2+8s_1s_3+3s_2^2-6s_4$;

$120f_5=s_1^5-10s_1^3s_2+20s_1^2s_3+15s_1s_2^2-20s_2s_3-30s_1s_4+24s_5$;

$720f_6=s_1^6-15s_1^4s_2+40s_1^3s_3+45s_1^2s_2^2-120s_1s_2s_3-15s_2^3-$

$-90s_1^2s_4+40s_3^2+90s_2s_4+144s_1s_5-120s_6$.

788. $s_5=859$. **789.** $s_8=13$. **790.** $s_{10}=621$.

791. $s_1=-1$, $s_2=s_3=\ldots=s_n=0$.

792. Se démontre facilement par une méthode de récurrence à l'aide de la relation

$$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-2}=0,$$

où $s_k=x_1^k+x_2^k$.

793. $s_5-s_1^5=5(f_1^2-f_2)(f_3-f_1f_2)$; $s_3-s_1^3=3(f_3-f_1f_2)$.

794. $s_5=-5f_2f_3$; $s_3=3f_3$; $s_2=-2f_2$.

795. $s_7=-7f_2f_5$; $s_2=-2f_2$; $s_5=5f_5$.

796. $x^n-a=0$.

797. $x^n-\frac{a}{1}x^{n-1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\frac{a^n}{n!}=0$.

798. $x^n+\frac{P_1(\alpha)}{1}x^{n-1}+\frac{P_2(\alpha)}{2!}x^{n-2}+\ldots+\frac{P_n(\alpha)}{n!}=0$, où, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les polynômes d'Hermite : $P_k(x)=(-1)^k e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^k e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^k}$, α est le zéro du polynôme d'Hermite $P_{n+1}(x)$.

S o l u t i o n. Supposons que l'équation recherchée est de la forme

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0.$$

En vertu des formules de Newton

$$\begin{aligned} a_1&=\alpha,\\ 2a_2&=\alpha a_1-1,\\ 3a_3&=\alpha a_2-a_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ ka_k&=\alpha a_{k-1}-a_{k-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\\ na_n&=\alpha a_{n-1}-a_{n-2},\\ 0&=\alpha a_n-a_{n-1}. \end{aligned}$$

Il découle de ces relations que a_k est un polynôme en α de degré k. Notons $k!\ a_k=P_k(\alpha)$. Alors, admettant que $P_0=1$, nous obtenons

$$P_1=\alpha \quad \text{et} \quad P_k-\alpha P_{k-1}+(k-1)P_{k-2}=0\,; \quad -\alpha P_n+nP_{n-1}=0.$$

Les premières relations montrent que P_k est un polynôme d'Hermite en α (cf. problème nº 707). La dernière relation donne $P_{n+1}(\alpha)=0$.

799. $\frac{1}{2}(s_k^2-s_{2k})$.

800.
$$\sum_{i=1}^{n}(x+x_i)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}x^m;$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j+x_i)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}s_m;$$
$$\sum_{i<j}(x_i+x_j)^k=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}s_m-2^k s_k\right).$$

801. $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{2k}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2k}C_{2k}^m(-1)^m s_m s_{2k-m}$.

802. Multiplier la deuxième colonne par $-s_1$, la troisième par s_2, ..., la $k^{\text{ème}}$ par $(-1)^{k-1}s_{k-1}$ et ajouter à la première. En vertu des formules de Newton nous obtenons:
$$\begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2f_2 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (k-1)f_{k-1} & f_{k-2} & & \dots & 1 \\ kf_k & f_{k-1} & & \dots & f_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & f_{k-2} & f_{k-3} & \dots & 1 \\ (-1)^{k-1}s_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \dots & f_1 \end{vmatrix}=s_k.$$

803. Multiplier la deuxième colonne par $-f_1$, la troisième par f_2, ..., la $k^{\text{ème}}$ par $(-1)^{k-1}f_{k-1}$ et ajouter les résultats à la première. En vertu des formules de Newton nous obtenons le résultat demandé.

804. $n!\,(x^n-f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\dots+(-1)^n f_n)$.

805. $\dfrac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}\mu\left(\frac{n}{d}\right)$, où d est le plus grand commun diviseur de m et n.

806. En vertu du résultat des problèmes nºs 117, 119, il suffit de considérer le cas $n=p_1p_2\dots p_k$, où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers impairs distincts. Dans ce cas, $s_1=s_2=s_4=(-1)^k$; $s_3=2(-1)^{k-1}$ si n est divisible par 3 et $s_3=(-1)^k$ si n n'est pas divisible par 3. Les calculs réalisés à l'aide des formules de Newton donnent:

$$f_2=\frac{1-(-1)^k}{2};$$
$$f_3=\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}\ \text{si } n \text{ est divisible par } 3;$$
$$f_3=\frac{(-1)^k-1}{2}\ \text{si } n \text{ n'est pas divisible par } 3;$$
$$f_4=\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}\ \text{si } n \text{ est divisible par } 3;$$
$$f_4=\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}\ \text{si } n \text{ n'est pas divisible par } 3.$$

807. $s_1=s_2=s_3=\ldots=s_n=a$. Par conséquent, pour $k\leqslant n$ on a

$$kf_k=af_{k-1}-af_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}f_1,$$
$$(k-1)f_{k-1}=af_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-2}f_1,$$

d'où

$$kf_k=(a-k+1)f_{k-1},\quad f_k=\frac{a-k+1}{k}f_{k-1}.$$

Il est évident que $f_1=a$; par conséquent,

$$f_2=\frac{a(a-1)}{1\cdot 2},\ \ldots,\ f_k=\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{1\cdot 2\ldots k},$$

et c'est pourquoi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation

$$x^n-\frac{a}{1}x^{n-1}+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}=0;$$
$$s_{n+1}=a-\frac{a(1-a)(2-a)\ldots(n-a)}{n!}.$$

808. $(x-a)(x-b)[x^n+(a+b)x^{n-1}+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)]=$
$=(x-a)[x^{n+1}+ax^n+a^2x^{n-1}+\ldots+a^nx-b(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)]=$
$=x^{n+2}-(a^{n+1}+a^nb+\ldots+b^{n+1})x+ab(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n).$

Les sommes des puissances $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ du nouveau polynôme sont évidemment nulles. Mais $\sigma_k=s_k+a^k+b^k$. Par conséquent, $s_k=-(a^k+b^k)$ pour $1\leqslant k\leqslant n$.

809. $s_k=-a^k-b^k$ pour un k impair,

$s_k=-(a^{\frac{k}{2}}-b^{\frac{k}{2}})^2$ pour un k pair.

810. a) $(x+a)(x^2+ax+b)-c=0$;

b) $x(x-a^2+3b)^2-(a^2b^2-4a^3c-4b^3+18abc-27c^2)=0$;

c) $x^3+(3b-a^2)x^2+b(3b-a^2)x+b^3-a^3c=0$;

d) $x^2(x-a^2+3b)+(a^2b^2-4a^3c-4b^3+18abc-27c^2)=0$;

e) $x^3-(a^2-2b)x^2+(b^2-2ac)x-c^2=0$;

f) $x^3+(a^3-3ab+3c)x^2+(b^3-3abc+3c^2)x+c^3=0$.

811. $y^2+(2a^3-9ab+27c)y+(a^2-3b^3)=0$.

812. $y^2-\dfrac{ab-3c}{c}y+\dfrac{b^3+a^3c-6abc+9c^2}{c^2}=0$.

813. $y^6-\dfrac{ab-3c}{c}y^5+\dfrac{b^3-5abc+6c^2}{c^2}y^4-\dfrac{a^2b^2-2b^3-2a^3b+6abc-7c^2}{c^2}y^3+$
$+\dfrac{b^3-5abc+6c^2}{c^2}y^2-\dfrac{ab-3c}{c}y+1=0.$

814. a) $y^3-by^2+(ac-4d)y-(a^2d+c^2-4bd)=0$
(résolvante de Ferrari) ;

b) $y^3-(3a^2-8b)y^2+(3a^4-16a^2b+16b^2+16ac-$
$-64d)y-(a^3-4ab+8c)^2=0$
(résolvante d'Euler) ;

c) $y^6-by^5+(ac-d)y^4-(a^2d+c^2-2bd)y^3+$
$+d(ac-d)y^2-bd^2y+d^3=0$;

d) $y^6+3ay^5+(3a^2+2b)y^4+(a^3+4ab)y^3+$
$+(2a^2b+b^2+ac-4d)y^2+(ab^2+a^2c-4ad)y+$
$+(abc-a^2d-c^2)=0$.

815. $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b+4y_1}\pm\sqrt{a^2-4b+4y_2}\pm\sqrt{a^2-4b+4y_3}}{4}$.
On choisit les signes des racines carrées de sorte que leur produit soit égal à $-a^3+4ab-8c$.

816.

$$x=\frac{\pm\sqrt{4a+\sqrt[3]{b^2-64a^3}}\pm\sqrt{4a+\varepsilon\sqrt[3]{b^2-64a^3}}\pm\sqrt{4a+\varepsilon^2\sqrt[3]{b^2-64a^3}}}{2},$$

$\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. On choisit les signes des racines carrées de sorte que leur produit soit égal à $-b$.

817. $(y+a)^4(y^2+6ay+25a^2)+3125b^4y=0$.

Solution. Les racines de l'équation recherchée sont:

$y_1=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+$
$+x_4x_1)$;
$y_2=(x_1x_3+x_3x_2+x_2x_5+x_5x_4+x_4x_1)(x_1x_2+x_2x_4+x_4x_3+$
$+x_3x_5+x_5x_1)$;
$y_3=(x_5x_2+x_2x_4+x_4x_3+x_3x_1+x_1x_5)(x_5x_4+x_4x_1+x_1x_2+$
$+x_2x_3+x_3x_5)$;
$y_4=(x_2x_1+x_1x_3+x_3x_5+x_5x_4+x_4x_2)(x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+$
$+x_1x_5+x_5x_2)$;
$y_5=(x_5x_3+x_3x_2+x_2x_4+x_4x_1+x_1x_5)(x_5x_2+x_2x_1+x_1x_3+$
$+x_3x_4+x_4x_5)$;
$y_6=(x_2x_1+x_1x_4+x_4x_3+x_3x_5+x_5x_2)\ (x_2x_4+x_4x_5+x_5x_1+x_1x_3+x_3x_2)$.

Il est évident que l'équation recherchée est de la forme

$y^6+c_1ay^5+c_2a^2y^4+c_3a^3y^3+c_4a^4y^2+(c_5a^5+c_6b^4)\,y+(c_7a^6+c_8ab^4)=0$,
où $c_1, c_2, \ldots, c_8$ sont des constantes absolues. Pour les déterminer, nous posons $a=-1$, $b=0$ et $a=0$, $b=-1$. Nous obtenons

a	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
-1	0	1	i	-1	$-i$	0	1	$3-4i$	1	1	$3+4i$	1
0	-1	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4	0	-5	$-5\varepsilon^4$	$-5\varepsilon^3$	$-5\varepsilon^2$	-5ε

Dans le premier cas, l'équation recherchée est de forme:

$$(y-1)^4(y^2-6y+25)=0,$$

et dans le second $y^6+3125y=0$. D'où nous déterminons tous les coefficients, excepté c_8. Il est facile de vérifier que $c_8=0$. Pour cela, on peut prendre, par exemple, $a=-5$, $b=4$. Dans ce cas $x_1=x_2=1$, et les autres racines satisfont à l'équation $x^3+2x^2+3x+4=0$, et tous les calculs s'effectuent sans difficulté.

818. Soit $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes. Soit ensuite

$$x^{k-1}\varphi(x)=f(x)q_k(x)+r_k(x) \text{ et } r_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\ldots+c_{kn}x^{n-1}.$$

Il est évident que les coefficients $c_{k,s}$ représentent certains polynômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On a ensuite

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & \ldots & r_1(x_n) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & \ldots & r_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_n(x_1) & r_n(x_2) & \ldots & r_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \ldots & \varphi(x_n) \\ x_1\varphi(x_1) & x_2\varphi(x_2) & \ldots & x_n\varphi(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}\varphi(x_1) & x_2^{n-1}\varphi(x_2) & \ldots & x_n^{n-1}\varphi(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

d'où il découle que

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) = R(f, \varphi).$$

La dernière équation est une identité entre les polynômes des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et c'est pourquoi elle reste vraie pour toutes les valeurs particulières de ces variables.

819. Assurons-nous tout d'abord que tous les polynômes $\psi_k(x)$ sont de degré $n-1$. Introduisons les notations suivantes:

$$f_k(x) = a_0x^{k-1} + \ldots + a_{k-1};$$
$$\bar{f}_k(x) = a_kx^{n-k} + \ldots + a_n;$$
$$\varphi_k(x) = b_0x^{k-1} + \ldots + b_{k-1};$$
$$\bar{\varphi}_k(x) = b_kx^{n-k} + \ldots + b_n.$$

On a alors

$$f(x) = x^{n-k+1}f_k(x) + \bar{f}_k(x);$$
$$\varphi(x) = x^{n-k+1}\varphi_k(x) + \bar{\varphi}_k(x);$$
$$\psi_k(x) = f_k(x)\,[x^{n-k+1}\varphi_k(x) + \bar{\varphi}_k(x)] -$$
$$- \varphi_k(x)\,[x^{n-k+1}f_k(x) + \bar{f}_k(x)] = f_k(x)\,\bar{\varphi}_k -$$
$$- \varphi_k\bar{f}_k(x) = (a_0b_k - b_0a_k)\,x^{n-1} + \ldots$$

Soit $\psi_k(x) = c_{k1} + c_{k2}x + \ldots + c_{kn}x^{n-1}$ et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros du polynôme $f(x)$. Alors

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \dots & \psi_1(x_n) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_n(x_1) & \psi_n(x_2) & \dots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} f_1(x_1)\varphi(x_1) & f_1(x_2)\varphi(x_2) & \dots & f_1(x_n)\varphi(x_n) \\ f_2(x_1)\varphi(x_1) & f_2(x_2)\varphi(x_2) & \dots & f_2(x_n)\varphi(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1)\varphi(x_1) & f_n(x_2)\varphi(x_2) & \dots & f_n(x_n)\varphi(x_n) \end{vmatrix} =
$$

$$
= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)\cdot \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} =
$$

$$
= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)\cdot \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)\,a_0^n\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.
$$

D'où il découle que

$$
\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = a_0^n\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) = R(f, \varphi).
$$

820. Le degré des polynômes χ_k n'est pas supérieur à $n-1$. C'est évident pour $1 \leqslant k \leqslant n-m$, et pour $k > n-m$ cela découle de ce que χ_k sont des polynômes de Bézout ψ_{k-n+m} pour $f(x)$ et $x^{n-m}\varphi(x)$. Soit $\chi_k(x) = c_{k1} + c_{k2}x + \dots + c_{kn}x^{n-1}$ et

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.
$$

Alors

$$
\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_1(x_2) & \dots & \chi_1(x_n) \\ \chi_2(x_1) & \chi_2(x_2) & \dots & \chi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(x_1) & \chi_n(x_2) & \dots & \chi_n(x_n) \end{vmatrix} = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) \times
$$

$$
\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m-1} & x_2^{n-m-1} & \dots & x_n^{n-m-1} \\ x_1^{n-m}f_0(x_1) & x_2^{n-m}f_0(x_2) & \dots & x_n^{n-m}f_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m}f_{m-1}(x_1) & x_2^{n-m}f_{m-1}(x_2) & \dots & x_n^{n-m}f_{m-1}(x_n) \end{vmatrix} =
$$

$$= \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)\,\Delta\cdot\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & \\ & & & a_0 & \\ & & & a_1 & a_0 \\ & & & \dots & \dots \\ & & & a_{m-1} & a_{m-2}\dots a_0\end{vmatrix} = a_0^m\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\,\Delta,$$

d'où il découle immédiatement le résultat exigé.

821. a) -7; b) 243; c) 0; d) -59; e) 4854; f) $(b_0a_2-b_2a_0)^2-(b_0a_1-b_1a_0)(b_1a_2-b_2a_1)$.

822. a) Pour $\lambda=3$ et $\lambda=-1$;

b) $\lambda=1,\ \lambda=\dfrac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2},\ \lambda=\dfrac{-2-\sqrt{2}\pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}$;

c) $\lambda=\pm\sqrt{-2},\ \lambda=\pm\sqrt{-12}$.

823. a) $y^6-4y^4+3y^2-12y+12=0$;

b) $5y^5-7y^4+6y^3-2y^2-y-1=0$;

c) $y^3+4y^2-y-4=0$.

824. a) $x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=0,\quad x_4=-2,$
$y_1=2;\quad y_2=3;\quad y_3=-1;\quad y_4=1.$

b) $x_1=0,\quad x_2=3,\quad x_3=2,\quad x_4=2,$
$y_1=1;\quad y_2=0;\quad y_3=2;\quad y_4=-1.$

c) $x_1=x_2=1,\quad x_3=-1,\quad x_4=2,$
$y_1=y_2=-1;\quad y_3=1;\quad y_4=2.$

d) $x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=1,\quad x_4=1,\quad x_{5,6}=2,$
$y_1=1;\quad y_2=3;\quad y_3=2;\quad y_4=3;\quad y_{5,6}=1\pm i\sqrt{2}.$

e) $x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=2,\quad x_4=x_5=2,\quad x_6=-4,$
$y_1=2;\quad y_2=-2;\quad y_3=0;\quad y_4=y_5=2;\quad y_6=2;$
$x_7=4,\quad x_8=-6,\quad x_9=-{}^2/_3,$
$y_7=6;\quad y_8=4;\quad y_9={}^4/_3.$

825. $a_0^na_n^{n-1}$.

826. Soit $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$;

$\varphi_1(x)=b_0x^k+\dots+b_k$; $\varphi_2(x)=c_0x^m+\dots+c_m$.

Alors

$$R(f,\ \varphi_1\cdot\varphi_2)=a_0^{m+k}\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i)=$$

$$=\left[a_0^m\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\right]\left[a_0^k\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\right]=R(f,\ \varphi_1)\cdot R(f,\ \varphi_2).$$

827. Seul le cas $n>2$ est intéressant à considérer. Désignons par d le plus grand commun diviseur de m et n; $\xi_1,\ \xi_2,\ \dots$ sont les racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité; $\eta_1,\ \eta_2,\ \dots$ sont les racines primitives d'ordre $\frac{n}{d}=n_1$ de l'unité. Alors

$$R(X_n,\ x^m-1)=\prod(\xi_i^m-1)=\prod(1-\xi_i^m)=\left[\prod(1-\eta_i)\right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}[X_{n_1}(1)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}.$$

Si m est divisible par n, on a $R(X_n, x^m-1)=0$. Si au contraire m n'est pas divisible par n, $n_1 \neq 1$ et en vertu du problème nº 123 $X_{n_1}(1)=1$ pour $n_1 \neq p^\lambda$, $X_{n_1}(1)=p$ pour $n_1=p^\lambda$ (p est un nombre premier). Ainsi,

$$R(X_n, x^m-1)=0 \text{ pour } n_1=\frac{n}{d}=1;$$

$$R(X_n, x^m-1)=p^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}} \text{ pour } n_1=\frac{n}{d}=p^\lambda;$$

$$R(X_n, x^m-1)=1 \text{ dans tous les autres cas.}$$

828. Il est évident que $R(X_n, X_m)$ est un nombre entier positif, qui est un diviseur de $R(X_n, x^m-1)$ et de $R(X_m, x^n-1)$. Désignons par d le plus grand commun diviseur de m et de n. Si m n'est pas divisible par n et n n'est pas divisible par m, alors $\frac{m}{d}$ et $\frac{n}{d}$ sont différents de 1 et premiers entre eux. En vertu du résultat du problème précédent, $R(X_n, x^m-1)$ et $R(X_m, x^n-1)$ sont dans ce cas premiers entre eux, et c'est pourquoi $R(X_n, X_m)=1$.

Il reste à considérer le cas où l'un des nombres m, n est divisible par l'autre. Admettons, pour fixer les idées, que m est divisible par n.

Si $m=n$, alors $R(X_m, X_n)=0$. Si $\frac{m}{n}$ n'est pas la puissance d'un nombre premier, alors $R(X_m, x^n-1)=1$ et, par conséquent, $R(X_m, X_n)=1$. Admettons, enfin, que $m=np^\lambda$. On a alors

$$R(X_m, X_n)=\prod_{\delta/n} R(X_m, x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Tous les facteurs du second membre sont égaux à l'unité, excepté ceux pour lesquels $\frac{m}{\delta}$ est une puissance du nombre p.

Si n n'est pas divisible par p, il ne reste qu'un facteur différent de l'unité pour $\delta=n$ et

$$R(X_m, X_n)=R(X_m, x^n-1)=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)}}=p^{\varphi(n)}.$$

Si n est divisible par p, il reste deux facteurs différents de l'unité: pour $\delta=n$ et $\delta=\frac{n}{p}$. Alors

$$R(X_m, X_n)=\frac{R(X_m, x^n-1)}{R(X_m, x^{n/p}-1)}=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)}-\frac{\varphi(m)}{\varphi(mp/n)}}=$$

$$=p^{\varphi(m)\left[\frac{1}{p^{\lambda-1}(p-1)}-\frac{1}{p^\lambda(p-1)}\right]}=p^{\frac{\varphi(m)}{p^\lambda}}=p^{\varphi(n)}.$$

Donc

$$R(X_m, X_n)=0 \qquad \text{pour } m=n;$$

$$R(X_m, X_n)=p^{\varphi(n)} \qquad \text{pour } m=np^\lambda;$$

$$R(X_m, X_n)=1 \text{ dans les autres cas.}$$

829. a) 49; b) -107; c) -843; d) 725; e) 2777.

830. a) $3125\,(b^2-4a^5)^2$; b) $\lambda^4\,(4\lambda-27)^3$;
c) $(b^2-3ab+9a^2)^2$; d) $4\,(\lambda^2-8\lambda+32)^3$.

831. a) $\lambda=\pm 2$; b) $\lambda_1=3$, $\lambda_{2,\,3}=3\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$;
c) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=125$;
d) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}$, $\lambda_{3,\,4}=\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}\,i\,\sqrt{3}$.

832. En général, si le discriminant est positif, le nombre de couples de zéros complexes conjugués est pair, si le discriminant est négatif, il est impair.

En particulier pour un polynôme du troisième degré, si $D>0$, tous les zéros sont réels, si $D<0$, deux zéros sont complexes conjugués.

Pour un polynôme du quatrième degré pour $D>0$ ou bien tous les zéros sont réels ou bien tous les zéros sont complexes. Pour $D<0$ on a deux zéros réels et un couple de zéros complexes conjugués.

833. $f=x^n+a$; $f'=nx^{n-1}$;

$$R\,(f',\,f)=n^na^{n-1}\,;\quad D\,(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,n^na^{n-1}.$$

834. $f=x^n+px+q$; $f'=nx^{n-1}+p$;

$$R(f',\,f)=n^n\prod_{k=0}^{n-2}\left(q+\frac{n-1}{n}\,p\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\,\varepsilon^k\right)$$

où $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n-1}+i\sin\frac{2\pi}{n-1}$.

$$R\,(f',\,f)=n^n\left[q^{n-1}+\frac{(n-1)^{n-1}\,p^{n-1}}{n^{n-1}}\cdot\left(-\frac{p}{n}\right)(-1)^{n-2}\right]=$$
$$=n^nq^{n-1}+(-1)^{n-1}\,(n-1)^{n-1}p^n\,;$$

$$D\,(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,n^nq^{n-1}+(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\,(n-1)^{n-1}p^n.$$

835. Soit d le plus grand commun diviseur de m et n. Introduisons les notations : $m_1=\frac{m}{d}$, $n_1=\frac{n}{d}$, ε est une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité, η est une racine primitive $n_1^{\text{ème}}$ de l'unité, $a_0x^{m+n}+a_1x^m+a_2=f\,(x)$. Alors $f'\,(x)=(m+n)\,a_0x^{m+n-1}+ma_1x^{m-1}$. Les racines de la dérivée sont : $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_{m-1}=0$,

$$\xi_{m+k}=\sqrt{-\frac{ma_1}{(m+n)\,a_0}}\;\varepsilon^k=\xi_m\varepsilon^k,\quad k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1.$$

Ensuite

$$R\,(f',\,f)=(m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[a_2+\frac{na_1}{m+n}\,\xi_m^m\varepsilon^{km}\right]=$$

$$=(m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\left[\prod_{k=0}^{n_1-1}\left(a_2+\frac{na_1}{m+n}\right)\xi_m\eta^k\right]^d=$$

$$=(m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\left[a_2^{n_1}+(-1)^{m_1+n_1-1}\frac{n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}}{(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}}\right]^d=$$

$$=a_0^n a_2^{m-1}\,[(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}a_2^{n_1}+(-1)^{m_1+n_1-1}n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}]^d$$

et, par conséquent,

$$D(f)=(-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}}a_0^{n-1}a_2^{m-1}\,[(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}a_2^{n_1}+$$
$$+(-1)^{m_1+n_1-1}n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}]^d.$$

836. Les discriminants sont égaux.

837. $x_1x_2+x_3x_4-x_1x_3-x_2x_4=(x_1-x_4)(x_2-x_3)$;
$x_1x_3+x_2x_4-x_1x_4-x_2x_3=(x_1-x_2)(x_3-x_4)$;
$x_1x_4+x_2x_3-x_1x_2-x_3x_4=(x_1-x_3)(x_4-x_2)$.

En élevant ces égalités au carré et en les multipliant nous obtenons le résultat demandé.

838. Soit $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Alors

$$D(f(x)(x-a))=a_0^{2n}(a-x_1)^2(a-x_2)^2\dots$$
$$\dots(a-x_n)^2\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2=D(f(x))\,[f(a)]^2.$$

839. Désignons $\varphi(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1$. Alors $(x-1)\varphi(x)=x^n-1$, d'où il découle

$$D(\varphi)\,[\varphi(1)]^2=D(x^n-1)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^n.$$

Par conséquent,

$$D(\varphi)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^{n-2}.$$

840. Soit $\varphi(x)=x^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+a$. Alors $\varphi(x)(x-1)=x^{n+1}+(a-1)x^n-a$. Par conséquent,

$$(na+1)^2D(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}\,[(n+1)^{n+1}a+n^n(1-a)^{n+1}].$$

Donc

$$D(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}\frac{(n+1)^{n+1}a+n^n(1-a)^{n+1}}{(1+na)^2}.$$

841. Soit $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$,
$\varphi(x)=b_0(x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_m)$.

Alors

$$D(f\varphi)=(a_0b_0)^{2m+2n-2}\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2\prod_{i<k}(y_i-y_k)^2\times$$
$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)^2=a_0^{2n-2}\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2\,b_0^{2m-2}\times$$
$$\times\prod_{i<k}(y_i-y_k)^2\Big[a_0^mb_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)\Big]^2=D(f)\,D(\varphi)\,[R(f,\varphi)]^2.$$

842. $X_{p^m}(x^{p^{m-1}}-1)=x^{p^m}-1$. Par conséquent,

$$D(X_{p^m})D(x^{p^{m-1}}-1)[R(x^{p^{m-1}}-1,\ X_{p^m})]^2=D(x^{p^m}-1).$$

Substituant les valeurs des quantités connues, nous obtenons

$$D(X_{p^m})=p^{mp^m-(m+1)p^{m-1}}(-1)^{\frac{1}{2}p^{m-1}(p-1)}.$$

843. $X_n\prod\limits_{\delta/n}(x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}=(x^n-1)\prod\limits_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}(x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}$. Soit ε un zéro de X_n.

Alors

$$X_n'(\varepsilon)=n\varepsilon^{n-1}\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}(\varepsilon^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Pour simplifier les calculs nous trouvons d'abord la valeur absolue du discriminant X_n:

$$|D(X_n)|=\prod_\varepsilon|X_n'(\varepsilon)|=n^{\varphi(n)}\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}\prod_\varepsilon(1-\varepsilon^\delta)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}=$$

$$=n^{\varphi(n)}\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}[X_{\frac{n}{\delta}}(1)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right)}\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Ensuite, $X_{\frac{n}{\delta}}(1)$ est différent de 1 seulement si $\frac{n}{\delta}$ est une puissance d'un nombre premier. D'autre part, $\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)$ est non nul seulement si $\frac{n}{\delta}$ n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Aussi dans le dernier produit nous ne devons conserver que les facteurs qui correspondent à $\frac{n}{\delta}=p_1, p_2, \ldots, p_k$, où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont différents diviseurs simples du nombre n.

Donc

$$|D(X_n)|=\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p/n}p^{\varphi(n)/p-1}}.$$

Tous les zéros de X_n étant complexes, le signe du discriminant est égal à $(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}$. En définitive

$$D(X_n)=(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}\cdot\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p/n}p^{\varphi(n)/p-1}}.$$

844. $E_n=n!\left(1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$,

$$E_n'=n!\left(1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Par conséquent,

$$E'_n = E_n - x^n;$$

$$R(E_n, E'_n) = \prod_{i=1}^{n} (-x_i)^n = (-1)^n[(-1)^n n!]^n = (n!)^n;$$

$$D(E_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n!)^n.$$

845. Il n'est pas difficile d'établir, que

$$(nx+n-a) F_n - x(x+1) F'_n + \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} = 0.$$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ les zéros de F_n. Alors

$$F'_n(x_i) = \frac{c}{x_i(x_i+1)}, \quad \text{où} \quad c = \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}.$$

Par conséquent,

$$R(F_n, F'_n) = \frac{c^n}{\prod x_i \prod (x_i+1)} = \frac{c^n}{\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \cdot \frac{(a-1)\dots(a-n)}{n!}} =$$

$$= \frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\dots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{(n!)^{n-2}};$$

$$D(F_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\dots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{(n!)^{n-2}}$$

846. $P'_n = nP_{n-1}$. Par conséquent,

$$R(P_n, P'_n) = n^n R(P_n, P_{n-1}).$$

Ensuite

$$P_n - xP_{n-1} + (n-1) P_{n-2} = 0.$$

Par conséquent, $P_n(\xi) = -(n-1) P_{n-2}(\xi)$ si ξ est un zéro de P_{n-1}, et c'est pourquoi

$$R(P_n, P_{n-1}) = (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1} R(P_{n-2}, P_{n-1}) =$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1} R(P_{n-1}, P_{n-2}).$$

Maintenant il est facile d'établir que

$$R(P_n, P_{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}\dots 2^2 \cdot 1.$$

En définitive

$$D(P_n) = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots (n-1)^{n-1} n^n.$$

847. $D(P_n) + 1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \dots n^{2n-1}$.

848. $D(P_n) = 2^{n-1} n^n$.

849. $D(P_n) = (n+1)^{n-1} \cdot 2^{n(n-1)}$.

850. $D(P_n) = 1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \dots n^{2n-1} \cdot 1^{2(n-1)} \cdot 3^{2(n-2)} \dots (2n-3)^2$.

851. $D(P_n) = 2^2 \cdot 3^4 \dots n^{2n-2} \cdot (n+1)^{n-1}$.

852. Soit $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. $D(f) = \prod (x_i - x_k)^2$. Nous recherchons le maximun de $D(f)$ d'après la règle

permettant de trouver le maximum relatif en résolvant le système d'équations

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n(n-1)R^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(D-\lambda(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2))=0.$$

Il est facile de voir que

$$\frac{\partial D}{\partial x_i}=\frac{Df''(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Ainsi, nous avons

$$f''(x)D-2\lambda x_i f'(x_i)=0 \text{ pour } i=1,2,\ldots,n.$$

Par conséquent, le polynôme $f(x)$ pour lequel le discriminant admet un maximum doit satisfaire à l'équation différentielle

$$cf(x)-2\lambda xf'(x)+Df''(x)=0,$$

où c est une constante. Divisant par $\frac{c}{n}$ et comparant les coefficients de x^n, nous obtenons que l'équation différentielle doit être de la forme

$$nf(x)-xf'(x)+c'f''(x)=0,$$

où c' est une nouvelle constante.

Comparant les coefficients de x^{n-1} et x^{n-2}, nous trouvons $a_1=0$, $a_2=$ $=-\frac{n(n-1)}{2}c'$. Maintenant nous pouvons déterminer c'. En effet, $n(n-1)\times$ $\times R^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a_1^2-2a_2=n(n-1)c'$, d'où $c'=R^2$.

Poursuivant la comparaison des coefficients, nous trouvons que $f(x)$ est de la forme suivante:

$$f(x)=x^n-\frac{n(n-1)}{2}R^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}R^4x^{n-4}-\ldots$$

Il est facile de voir que

$$f(x)=R^nP_n\left(\frac{x}{R}\right),$$

où P_n est un polynôme d'Hermite.

$$D(f)=R^{n(n-1)}\cdot 1\cdot 2^2\cdot 3^3\ldots n^n.$$

C'est précisément le maximum recherché du discriminant.

853. $2^{2n}(-1)^n a_0 a_n[D(f)]^2$.

854. $m^{mn}(-1)^{\frac{m(m-1)n}{2}}a_0^{m-1}a_n^{m-1}[D(f)]^m$.

855. $F(x)=\prod_{i=1}^{n}(\varphi(x)-x_i)$.

Par conséquent,

$$D(F)=\prod_{i=1}^{n}D(\varphi(x)-x_i)\left[\prod_{i<k}R(\varphi(x)-x_i,\ \varphi(x)-x_k)\right]^2.$$

Il est ensuite évident que

$$R(\varphi(x)-x_i,\ \varphi(x)-x_k)=(x_i-x_k)^m.$$

Voilà pourquoi

$$D(F)=\prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x)-x_i) \prod_{i<k} (x_i-x_k)^{2m}=[D(f)]^m \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x)-x_i),$$

ce qu'il fallait démontrer.

856. $(y+1)(y-5)(y-19)=0$.

857. a) Solution. $x^3=3x+4$. Soit $y=1+x+x^2$, où x est la racine de l'équation donnée. Alors

$$yx=x+x^2+x^3=x+x^2+3x+4=4+4x+x^2;$$
$$yx^2=4x+4x^2+x^3=4x+4x^2+3x+4=4+7x+4x^2.$$

Eliminant x, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 1-y & 1 & 1 \\ 4 & 4-y & 1 \\ 4 & 7 & 4-y \end{vmatrix}=0,$$

$$y^3-9y^2+9y-9=0;$$

b) $y^3-7y^2+3y-1=0$;

c) $y^4+5y^3+9y^2+7y-6=0$;

d) $y^4-12y^3+43y^2-49y+20=0$.

858. a) $y^3-2y^2+6y-4=0$, $x=-\dfrac{y^2-2y+4}{2}$;

b) $y^4-9y^3+31y^2-45y+13=0$, $x=\dfrac{y^2-3y+2}{3}$;

c) $y^4+2y^3-y^2-2y+1=0$, la transformation inverse n'existe pas.

859. $y^3-y^2-2y+1=0$.

L'équation transformée coïncide avec l'équation initiale. Cela signifie que parmi les racines de l'équation initiale il existe des racines x_1 et x_2 liées par la relation $x_2=2-x_1^2$.

860. Soit $x_2=\varphi(x_1)$, où $\varphi(x_1)$ est une fonction rationnelle à coefficients rationnels. Sans restreindre la généralité on peut admettre que $x_2=ax_1^2+bx_1+$ $+c$. Les nombres $ax_1^2+bx_1+c$, $ax_2^2+bx_2+c$, $ax_3^2+bx_3+c$ sont les racines d'une équation du troisième degré à coefficients rationnels, dont l'une coïncide avec la racine $x_2=ax_1^2+bx_1+c$ de l'équation donnée. L'équation donnée étant irréductible, les autres racines doivent aussi coïncider. Par conséquent, ou bien $ax_2^2+bx_2+c=x_3$, $ax_3^2+bx_3+c=x_1$, ou bien ax_2^2+ $+bx_2+c=x_1$, $ax_3^2+bx_3+c=x_3$. La dernière équation n'est pas possible, car x_3 ne peut pas être racine d'une équation du deuxième degré à coefficients rationnels. Donc, sous notre hypothèse, les racines de l'équation donnée sont liées par les relations:

$$x_2=ax_1^2+bx_1+c;$$
$$x_3=ax_2^2+bx_2+c;$$
$$x_1=ax^2+bx_3+c.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{D}=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_3)=$$
$$=[ax_1^2+(b-1)x_1+c][ax_2^2+(b-1)x_2+c]\times$$
$$\times[ax_3^2+(b-1)x_3+c]$$

comme fonction symétrique à coefficients rationnels de x_1, x_2, x_3 est un nombre rationnel. La nécessité de la condition est démontrée.

Admettons maintenant que le discriminant D est le carré du nombre rationnel d. Alors

$$x_2-x_3=\frac{d}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{d}{3x_1^2+2ax_1+b}.$$

D'autre part,

$$x_2+x_3=-a-x_1.$$

Il en découle que x_2 et x_3 sont des fonctions rationnelles de x_1. La condition est donc suffisante.

861. a) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;

b) $\frac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$;

c) $1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}$.

862. a) $\frac{\alpha^2-\alpha+1}{3}$; b) $17\alpha^2-3\alpha+55$; c) $3-10\alpha+8\alpha^2-3\alpha^3$;

d) le dénominateur s'annule pour l'une des racines de l'équation.

863. $mx_1^2+nx_1+p=\frac{(pm-bm^2+amn-n^2)x_1+(amp-np-cm^2)}{mx_1+ma-n}$.

864. Si

$$x_2=\frac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta},$$

on a

$$x_3=\frac{\alpha x_2+\beta}{\gamma x_2+\delta},$$

$$x_1=\frac{\alpha x_3+\beta}{\gamma x_3+\delta}=\frac{(\alpha^2+\beta\gamma)x_2+(\alpha+\delta)\beta}{(\alpha+\delta)\gamma x_2+(\beta\gamma+\delta^2)}.$$

D'autre part, $x_1=\frac{-\delta x_2+\beta}{\gamma x_2-\alpha}$, d'où découle la nécessité de la condition

$$\alpha\delta-\beta\gamma=(\alpha+\delta)^2.$$

865. Soit

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Alors

$$a_0x^n-a_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^na_n=a_0(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n).$$

Multipliant ces égalités l'une par l'autre, nous obtenons:

$$a_0^2(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_n^2)=(a_0x^n+a_2x^{n-2}+\ldots)^2-(a_1x^{n-1}+a_3x^{n-3}+\ldots)^2.$$

D'où nous concluons que pour effectuer la transformation $y=x^2$ il faut remplacer x^2 par y dans l'équation

$$(a_0x^n+a_2x^{n-2}+\ldots)^2-(a_1x^{n-1}+a_3x^{n-3}+\ldots)^2=0.$$

866. L'équation recherchée s'obtient en remplaçant x^3 par y dans l'équation

$$(a_0x^n+a_3x^{n-3}+\ldots)^3+(a_1x^{n-1}+a_4x^{n-4}+\ldots)^3+$$
$$+(a_2x^{n-2}+a_5x^{n-5}+\ldots)^3-3(a_0x^n+a_3x^{n-3}+\ldots)\times$$
$$\times(a_1x^{n-1}+a_4x^{n-4}+\ldots)(a_2x^{n-2}+a_5x^{n-5}+\ldots)=0.$$

867. Il n'existe qu'un nombre fini de polynômes $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$ à coefficients entiers, dont les modules des zéros ne sont pas supérieurs à l'unité, car les coefficients de tels polynômes sont évidemment bornés:

$$|a_k| \leqslant \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Soit $f = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_n \neq 0$, l'un de ces polynômes et soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses zéros. Notons $f_m = (x - x_1^m)(x - x_2^m) \ldots (x - x_n^m)$. Tous les polynômes f_m ont des coefficients entiers et tous leurs zéros ne sont pas supérieurs en module à l'unité. Aussi il n'y a parmi eux qu'un nombre fini de zéros distincts. Choisissons une suite infinie de nombres entiers $m_0 < < m_1 < m_2 < \ldots$ telle que $f_{m_0} = f_{m_1} = f_{m_2} = \ldots$ Cela signifie que

$$x_1^{m_l} = x_{\alpha_1}^{m_0},$$
$$x_2^{m_l} = x_{\alpha_2}^{m_0},$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n^{m_l} = x_{\alpha_n}^{m_0},$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est une certaine permutation des indices $1, 2, \ldots, n$. Comme il y a une infinité d'exposants m_i et seulement un nombre fini de permutations, on peut trouver deux (et une infinité) exposants m_{i_1} et m_{i_2} auxquels correspond une même permutation $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Pour de tels exposants on a les égalités:

$$x_1^{m_{i_1}} = x_1^{m_{i_2}};$$
$$x_2^{m_{i_1}} = x_2^{m_{i_2}};$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n^{m_{i_1}} = x_n^{m_{i_2}},$$

montrant que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines d'ordre $m_{i_2} - m_{i_1}$ de l'unité, étant donné que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont non nuls en vertu de la condition $a_n \neq 0$.

868. Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme changeant de signe lors des permutations impaires des variables. Comme $F(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n) = = -F(x_2, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est divisible par $x_1 - x_2$. De façon analogue, on démontre que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est divisible par toutes les différences $x_i - x_k$. Par conséquent, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est divisible par $\Delta = \prod_{i>k} (x_i - x_k)$, égal au déterminant de Vandermonde. Comme le déterminant Δ change de signe lors de permutations impaires de variables, $\frac{F}{\Delta}$ est un polynôme symétrique.

869. Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme invariant par rapport aux permutations paires de variables. Désignons par $\overline{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le polynôme qui s'obtient de $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par une certaine permutation impaire.

Il est facile de vérifier que pour chaque permutation impaire φ se transforme en $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$ en φ. Par conséquent, $\varphi + \overline{\varphi}$ reste invariant par rapport à toutes les permutations, $\varphi - \overline{\varphi}$ change de signe lors des permutations impaires. Ensuite

$$\varphi = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2} + \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2} = F_1 + F_2\Delta,$$

où Δ est le déterminant de Vandermonde. En vertu du résultat du problème n° 868 F_2 est un polynôme symétrique; F_1 est aussi un polynôme symétrique, puisqu'il est invariant par rapport à toutes les permutations des variables.

870. $(f_1^2 - f_2)\,\Delta$, où f_1, f_2 sont les polynômes symétriques fondamentaux en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

871. $$u^3 + a(\alpha+\beta+\gamma)\,u^2 + [(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,b + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)(a^2-b)]\,u +$$
$$+ c(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) + \frac{ab-3c}{2}(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2) +$$
$$+ \alpha\beta\gamma\,(a^3-3ab+6c) + \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2}\sqrt{\Delta} = 0,$$
où Δ est le discriminant de l'équation donnée.

872. $u^3 - 3pp'u - \dfrac{27qq' + \sqrt{\Delta\Delta'}}{2} = 0$, où Δ et Δ' sont les discriminants des équations données.

873. Soit $y = ax^2 + bx + c$ la transformation de Tschirnhausen qui relie les équations données. Alors, pour un choix approprié de la numérotation,
$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) +$$
$$+ c(x_1 + x_2 + x_3)$$
est un nombre rationnel. Par conséquent, l'une des équations
$$u^3 - 3pp'u - \frac{27qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2} = 0$$
(problème n° 872) admet une racine rationnelle. Il en découle que $\sqrt{\Delta\Delta'}$ est un nombre rationnel. La nécessité de la condition est démontrée.

Inversement, supposons que l'équation
$$u^3 - 3pp'u - \frac{27qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2} = 0 \qquad (*)$$
a une racine rationnelle u.

Il est facile de s'assurer que le discriminant de l'équation (*) est égal à $\dfrac{27^2}{4}(q\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta}q')^2$ et, par conséquent, diffère de $\sqrt{\Delta}$ par un facteur égal au carré d'un nombre rationnel. Par conséquent, la différence $u' - u''$ des seconde et troisième racines de l'équation diffère de $\sqrt{\Delta}$ par un facteur rationnel.

Pour y_1, y_2, y_3 nous avons le système d'équations:
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = u,$$
$$(x_2 - x_3)\,y_1 + (x_3 - x_1)\,y_2 + (x_1 - x_2)\,y_3 = u' - u'' = r\sqrt{\Delta}.$$
A l'aide de ce système, nous trouvons:
$$y_1 = \frac{-3ux_1 + (x_2 - x_3)\,r\sqrt{\Delta}}{6p}.$$
Or $(x_2 - x_3)\sqrt{\Delta}$ s'exprime rationnellement en fonction de x_1. La suffisance des conditions est démontrée.

874. Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'expriment linéairement en fonction de $f_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$. Par conséquent, on peut représenter chaque polynôme en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sous forme de polynôme en $f_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$:
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum A f_1^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$
Lors de la permutation circulaire des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le monôme $Af_1^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ acquiert le facteur $\varepsilon^{-(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(n-1)\alpha_{n-1})}$. Donc, pour que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reste invariant lors des permutations circulaires des variables il faut et il suffit que $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\,\alpha_{n-1}$ soit divisible par n.

875. On peut prendre $f_1, \eta_1^n, \eta_2\eta_1^{-2}, \ldots, \eta_{n-1}\eta_1^{-(n-1)}$.

876. Soit $\eta_1 = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$; $\eta_2 = x_1 + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon$, où $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $\frac{\eta_1^2}{\eta_2} = \varphi_1 + i\sqrt{3}\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont certaines fonctions rationnelles de x_1, x_2, x_3 à coefficients rationnels restant invariantes par rapport à une permutation circulaire de x_1, x_2, x_3. Il est facile de voir que chaque fonction rationnelle de x_1, x_2, x_3 invariante lors d'une permutation circulaire des variables s'exprime rationnellement à l'aide de $f_1 = x_1 + x_2 + x_3$, φ_1, φ_2.

Il suffit de le démontrer pour $\eta_2\eta_1^{-2}$ et η_1^3. Or,

$$\eta_2\eta_1^{-2} = \frac{1}{\varphi_1 + i\varphi_2\sqrt{3}};$$

$$\eta_1^3 = \left(\frac{\eta_1^2}{\eta_2}\right)^2 \cdot \frac{\eta_2^2}{\eta_1} = (\varphi_1 + i\varphi_2\sqrt{3})^2(\varphi_1 - i\varphi_2\sqrt{3}).$$

877. Pour $n = 4$

$$\eta_1 = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4,$$
$$\eta_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$
$$\eta_3 = x_1 - ix_2 - x_3 + ix_4.$$

Posons $\theta_1 = \eta_1\eta_3$; $\theta_2 + i\theta_3 = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$; $\theta_2 - i\theta_3 = \frac{\eta_3\eta_2}{\eta_1}$. θ_1, θ_2, θ_3 sont des fonctions rationnelles à coefficients rationnels de x_1, x_2, x_3, x_4 invariantes lors des permutations circulaires. Il est facile de voir qu'elles forment avec $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ un système de fonctions fondamentales. En effet,

$$\eta_2\eta_1^{-2} = \frac{\theta_2 - i\theta_3}{\theta_1}; \quad \eta_3\eta_1^{-3} = \frac{\theta_2 - i\theta_3}{\theta_1(\theta_2 + i\theta_3)};$$

$$\eta_1^4 = \frac{\theta_1^4(\theta_2 + i\theta_3)}{\theta_2 - i\theta_3}.$$

878. Soit $\eta_1 = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon^3 + x_4\varepsilon^4 + x_5$,

$$\eta_2 = x_1\varepsilon^2 + x_2\varepsilon^4 + x_3\varepsilon + x_4\varepsilon^3 + x_5,$$
$$\eta_3 = x_1\varepsilon^3 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^4 + x_4\varepsilon^2 + x_5,$$
$$\eta_4 = x_1\varepsilon^4 + x_2\varepsilon^3 + x_3\varepsilon^2 + x_4\varepsilon + x_5.$$

Considérons la fonction rationnelle $\lambda_1 = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$ et ordonnons-la suivant les puissances de ε, remplaçant 1 par $-\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^4$:

$$\lambda_1 = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \varepsilon^4\varphi_4.$$

Les coefficients φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des nombres rationnels. Remplaçant ε par ε^2, ε^3 et ε^4 nous obtenons

$$\lambda_2 = \frac{\eta_2\eta_4}{\eta_1} = \varepsilon^2\varphi_1 + \varepsilon^4\varphi_2 + \varepsilon\varphi_3 + \varepsilon^3\varphi_4,$$

$$\lambda_3 = \frac{\eta_3\eta_1}{\eta_4} = \varepsilon^3\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^4\varphi_3 + \varepsilon^2\varphi_4,$$

$$\lambda_4 = \frac{\eta_4\eta_3}{\eta_2} = \varepsilon^4\varphi_1 + \varepsilon^3\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + \varepsilon\varphi_4.$$

En tant que « fonctions fondamentales » on peut prendre f, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. En effet, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 s'expriment rationnellement par ces fonctions. Ensuite,

$$\eta_2\eta_1^{-2} = \lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_4^{-1}, \qquad \eta_4\eta_1^{-4} = \lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1},$$
$$\eta_3\eta_1^{-3} = \lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_4^{-1}, \qquad \eta_1^5 = \lambda_1^3\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^2.$$

Chapitre 7

ALGÈBRE LINÉAIRE

879. a) La dimension est $r = 2$, la base est formée, par exemple, par X_1 et X_2;

b) $r = 2$, la base est formée, par exemple, par X_1 et X_2;

c) $r = 2$, la base est formée, par exemple, par X_1 et X_2.

880. a) La dimension de l'intersection est égale à 1, le vecteur de base est

$$Z = (5, -2, -3, -4) = X_1 - 4X_2 = 3Y_1 - Y_2.$$

La dimension de la somme est 3, la base est constituée par exemple des vecteurs Z, X_1, Y_1.

b) La somme coïncide avec le premier espace, l'intersection avec le second.

c) La somme est tout l'espace à quatre dimensions, l'intersection est formée uniquement du vecteur nul.

881. a) $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; b) $(1, 0, -1, 0)$.

882. a) $x_1' = \frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{2}$, $x_2' = \frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{2}$,

$x_3' = \frac{x_1-x_2-x_3+x_4}{2}$, $x_4' = \frac{-x_1+x_2+x_3+x_4}{2}$;

b) $x_1' = x_2 - x_3 + x_4$, $x_2' = -x_1 + x_2$, $x_3' = x_4$, $x_4' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$.

883. $x_1'x_2' + x_3'x_4' = \frac{1}{8}$.

884. Soit $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos^2 x + \ldots + a_n \cos^n x =$
$= b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_n \cos nx$.

Alors $a_0 = b_0 - b_2 + b_4 - \ldots$,

$$a_k = 2^{k-1}\left[b_k + \sum_{1 \le p \le \frac{n-k}{2}} (-1)^p \frac{(k+2p)(k+p-1)(k+p-2)\ldots(k+1)}{p!} b_{k+2p}\right],$$

$$b_0 = a_0 + \sum_{1 \le p \le \frac{n}{2}} 2^{-2p} C_{2p}^p a_{2p},$$

$$b_k = 2^{1-k}\left(a_k + \sum_{1 \le p \le \frac{n-k}{2}} 2^{-2p} C_{k+2p}^p a_{k+2p}\right).$$

885. Les coordonnées du point d'intersection avec la première droite sont $\left(\frac{14}{3}, \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}\right)$, avec la seconde (42, 1, 7, 11).

886. Les droites $X_0 + tX_1$, $Y_0 + tY_1$ sont contenues dans la variété $X_0 + t(Y_0 - X_0) + t_1X_1 + t_2Y_1$.

887. Pour que le problème soit résoluble pour les droites $X_0 + tX_1$, $Y_0 + tY_1$, il faut et il suffit que les vecteurs X_0, Y_0, X_1, Y_1 soient linéairement dépendants. Ceci est équivalent à enfermer les droites dans un espace à trois dimensions englobant l'origine des coordonnées.

888. Les plans $X_0 + t_1X_1 + t_2X_2$ et $Y_0 + t_1Y_1 + t_2Y_2$ peuvent être plongés dans la variété $X_0 + t(Y_0 - X_0) + t_1X_1 + t_2X_2 + t_3Y_1 + t_4Y_2$.

889. Il y en a six:

1) les plans n'ont pas de points communs et ne peuvent être inclus dans une variété linéaire à quatre dimensions (les plans se coupent entièrement);

2) les plans n'ont pas de points communs, ils font partie d'une variété à quatre dimensions, mais ne sont pas immergés dans une variété à trois dimensions (ils se coupent parallèlement à une droite);

3) les plans n'ont pas de points communs et sont immergés dans une variété à trois dimensions (les plans sont parallèles);

4) les plans ont un point commun. Dans ce cas ils sont immergés dans une variété à quatre dimensions, mais ne sont pas immergés dans une variété à trois dimensions;

5) l'intersection des plans est une droite;

6) les plans coïncident.

Seuls les cas 3, 5, 6 peuvent être réalisés dans l'espace à trois dimensions.

890. Soient $Q = X_0 + P$ une variété linéaire, P un espace linéaire. Si $X_1 \in Q$ et $X_2 \in Q$, on a $X_1 = X_0 + Y_1$, $X_2 = X_0 + Y_2$, où Y_1 et Y_2 appartiennent à P. Alors $\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 = X_0 + \alpha Y_1 + (1-\alpha) Y_2 \in Q$ pour tout α. Inversement, soit Q un ensemble de vecteurs contenant avec les vecteurs X_1, X_2 leur combinaison linéaire $\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$ pour un α arbitraire. Soient X_0 un certain vecteur fixe de Q et P l'ensemble de tous les vecteurs $Y = X - X_0$. Si $Y \in P$, alors $cY \in P$ pour tout c, car $cY = cX + (1-c) X_0 - X_0$. Ensuite, si $Y_1 = X_1 - X_0 \in P$ et $Y_2 = X_2 - X_0 \in P$, on a $\alpha Y_1 + (1-\alpha) \times Y_2 = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 - X_0 \in P$ pour tout α. Prenons maintenant un certain α fixe, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et c_1 et c_2 arbitraires. Alors $\frac{c_1}{\alpha} Y_1 \in P$, $\frac{c_2}{1-\alpha} Y_2 \in P$, pour tous $Y_1, Y_2 \in P$, et, par conséquent, pour

$$c_1Y_1 + c_2Y_2 = \alpha \frac{c_1}{\alpha} Y_1 + (1-\alpha) \frac{c_2}{1-\alpha} Y_2 \in P.$$

Il en découle que P est un espace linéaire et Q une variété linéaire.

R e m a r q u e. Le résultat n'est pas vrai si le champ fondamental est le champ des résidus modulo 2.

891. a) 9; b) 0.

892. a) 90°; b) 45°; c) $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{77}}$.

893. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

894. $\cos A = \frac{5}{\sqrt{39}}$, $\cos B = \frac{8}{\sqrt{78}}$, $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

895. $\sqrt{n}$.

896. Pour un n impair, il n'y a pas de diagonales orthogonales. Pour $n = 2m$ le nombre de diagonales orthogonales à la diagonale donnée est égal à C_{2m-1}^{m-1}.

897. Les coordonnées des points sont données par les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \sqrt{\frac{4}{6}} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}} & \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \end{pmatrix}.$$

898. $R=\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Les coordonnées du centre sont :

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)n}}\right).$$

899. $\left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

900. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

901. En qualité des deux autres vecteurs on peut prendre, par exemple, $\frac{1}{\sqrt{26}}(0, -4, 3, 1)$ et $\frac{1}{3\sqrt{26}}(-13, 5, 6, 2)$.

902. $(1, 2, 1, 3)$, $(10, -1, 1, -3)$, $(19, -87, -61, 72)$.

903. Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & -4 & -2 \\ 39 & -37 & 51 & -29 & 5 \end{pmatrix}$.

904. Le système s'interprète comme le problème de la recherche des vecteurs orthogonaux au système de vecteurs représentant les coefficients des équations. L'ensemble des vecteurs recherchés est un espace orthogonal complémentaire de l'espace engendré par les vecteurs donnés. Le système fondamental de solutions est une base de l'espace des vecteurs recherchés.

905. Par exemple, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{498}}(1, 12, 8, 17)$.

906. a) $X'=(3, 1, -1, -2) \in P$, b) $X'=(1, 7, 3, 3) \in P$,
$X''=(2, 1, -1, 4) \perp P$; $X''=(-4, -2, 6, 0) \perp P$.

907. Supposons que $A_1, A_2, \dots, A_m$ sont linéairement indépendants, et soit P l'espace engendré par ces vecteurs. Soit ensuite $X = Y + Z$, $Y \in P$, $Z \perp P$.

Posons

$$Y = c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_mA_m.$$

Formons un système d'équations pour déterminer $c_1, c_2, \dots, c_m$ en multipliant scalairement la dernière égalité par A_i, $i = 1, 2, \dots, m$, et en prenant en considération que $YA_i = XA_i$.

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
c_1A_1^2+c_2A_1A_2+\ldots+c_mA_1A_m&=XA_1,\\
c_1A_2A_1+c_2A_2^2+\ldots+c_mA_2A_m&=XA_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
c_1A_mA_1+c_2A_mA_2+\ldots+c_mA_m^2&=XA_m.
\end{aligned}$$

En vertu de l'indépendance linéaire des $A_1, A_2, \ldots, A_m$ le déterminant Δ de ce système est non nul.

Trouvons $c_1, c_2, \ldots, c_m$ et substituons-les dans l'expression de Y. Nous obtenons

$$Y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_m \\ XA_1 & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ XA_2 & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ XA_m & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}$$

et

$$Z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}$$

Il faut comprendre ces équations en ce sens que les vecteurs Y et Z sont combinaisons linéaires des vecteurs se trouvant dans la première ligne avec des coefficients égaux aux cofacteurs correspondants.

Nous obtenons alors en définitive que

$$Y^2=Y(X-Z)=YX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -XA_1 & -XA_2 & \ldots & -XA_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}$$

et

$$Z^2=Z(X-Y)=ZX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X^2 & XA_1 & XA_2 & \ldots & XA_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}.$$

908. Soient Y un vecteur quelconque de l'espace P et X' la projection orthogonale du vecteur X sur P.

Alors

$$\cos(X,\ Y)=\frac{XY}{|X|\cdot|Y|}=\frac{X'Y}{|X|\cdot|Y|}=\frac{|X'|\cdot|Y|\cdot\cos(X',\ Y)}{|X|\cdot|Y|}=$$
$$=\frac{|X'|}{|X|}\cos(X',\ Y),$$

d'où il découle que la plus grande valeur de $\cos(X,\ Y)$ est atteinte pour des Y tels que $\cos(X',\ Y)=1$, c'est-à-dire pour $Y=\alpha X'$ quand $\alpha>0$.

909. a) 45°; b) 90°.

910. $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

911. $|X-Y|^2=|(X-X')+(X'-Y)|^2=|X-X'|^2+|X'-Y|^2\geqslant|X-X'|^2$; notons que l'égalité n'est possible que pour $Y=X'$.

912. a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

913. $\dfrac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n\sqrt{2n+1}}$.

914. La plus courte distance recherchée est égale à la plus courte distance du point X_0-Y_0 à l'espace $P+Q$.

915. Supposons que l'un des sommets coïncide avec l'origine des coordonnées et que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont les vecteurs issus de l'origine et joignant les autres sommets. Il est facile de voir que $X_i^2=1$, $X_iX_j=\frac{1}{2}$. La variété passant par les premiers $m+1$ sommets est l'espace $t_1X_1+\ldots+t_mX_m$. La variété passant par les autres $n-m$ sommets est $X_n+t_{m+1}(X_{m+1}-X_n)+\ldots+t_{n-1}(X_{n-1}-X_n)$. La plus courte distance recherchée est la distance de X_n à l'espace P, engendré par les vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m, X_n-X_{m+1}, \ldots, X_n-X_{n-1}$.

Soit

$$X_n=t_1X_1+\ldots+t_mX_m+t_{m+1}(X_n-X_{m+1})+\ldots+t_{n-1}(X_n-X_{n-1})+Y,$$

où $Y\perp P$. Formant le produit scalaire de X_n avec $X_1, \ldots, X_m, X_n-X_{m+1}, \ldots, X_n-X_{n-1}$, nous obtenons pour déterminer $t_1, \ldots, t_{n-1}$ le système d'équations

$$\begin{array}{ll}
t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2}, & t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},\\
\frac{1}{2}t_1+t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}t_{m+1}+t_{m+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+t_m=\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\ldots+t_{n-1}=\frac{1}{2},
\end{array}$$

d'où $t_1=t_2=\ldots=t_m=\dfrac{1}{m+1}$, $t_{m+1}=t_{m+2}=\ldots=t_{n-1}=\dfrac{1}{n-m}$.

Par conséquent, $Y=\dfrac{X_{m+1}+X_{m+2}+\ldots+X_n}{n-m}-\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_m}{m+1}$.

Donc, la perpendiculaire commune est le vecteur qui réunit les centres des faces choisies. La plus courte distance est égale à la longueur de ce vecteur

$$|Y|=\sqrt{\frac{n+1}{2(n-m)(m+1)}}.$$

916. a) La projection du vecteur $(t_1+2t_2, t_1-2t_2, t_1+5t_2, t_1+2t_2)$ sur le premier plan est $(t_1+2t_2, t_1-2t_2, 0, 0)$. Par conséquent,

$$\cos^2\varphi=\frac{2t_1^2+8t_2^2}{4t_1^2+14t_1t_2+37t_2^2}=\frac{2\lambda^2+8}{4\lambda^2+14\lambda+37}, \quad \text{où } \lambda=\frac{t_1}{t_2}.$$

Cette expression admet un maximum égal à $\frac{8}{9}$ pour $\lambda=-4$.

b) L'angle formé par n'importe quel vecteur du deuxième plan avec sa projection orthogonale sur le premier plan reste invariant et est égal à $\frac{\pi}{4}$.

917. Le cube est un ensemble de points dont les coordonnées satisfont aux inégalités $-\frac{a}{2} \leqslant x_i \leqslant \frac{a}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ici a est la longueur de l'arête du cube. Passons à de nouveaux axes, en adoptant comme axes de coordonnées $e_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $e_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ces vecteurs sont orthonormés et leurs directions coïncident avec les directions de certaines diagonales du cube. Les coordonnées des points du cube dans ces axes satisfont aux inégalités

$$-a \leqslant x_1'+x_2'+x_3'+x_4' \leqslant a, \qquad -a \leqslant x_1'+x_2'-x_3'-x_4' \leqslant a,$$
$$-a \leqslant x_1'-x_2'+x_3'-x_4' \leqslant a, \qquad -a \leqslant x_1'-x_2'-x_3'+x_4' \leqslant a.$$

Nous obtiendrons l'intersection qui nous intéresse en posant $x_1' = 0$. Elle représente un corps situé dans l'espace engendré par e_2', e_3', e_4' et dont les coordonnées des points satisfont aux inégalités $\pm x_2' \pm x_3' \pm x_4' \leqslant a$.

C'est un octaèdre régulier borné par les plans qui découpent sur les axes des segments de longueur a.

918. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_m] = \begin{vmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & \ldots & B_1B_m \\ B_2B_1 & B_2^2 & \ldots & B_2B_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_mB_1 & B_mB_2 & \ldots & B_m^2 \end{vmatrix}.$$

Il est facile d'établir cette formule par une méthode de récurrence en prenant en considération le résultat du problème nº 907. De la formule il découle immédiatement que le volume ne dépend pas de la numérotation des sommets et que

$$V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

Soient maintenant $B_1 = B_1' + B_1''$, C_1, C_1', C_1'' les projections orthogonales des vecteurs B_1, B_1' et B_1'' sur l'espace orthogonal complémentaire de $(B_2, \ldots, B_m)$. Il est évident que $C_1 = C_1' + C_1''$. D'après la définition $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] = |C_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1', B_2, \ldots, B_m] = |C_1'| \cdot V \times \times [B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1'', B_2, \ldots, B_m] = |C_1''| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$. Comme $|C_1| \leqslant \leqslant |C_1'| + |C_1''|$, on a $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$. Le signe d'égalité n'est possible que si C_1' et C_1'' sont colinéaires et de même direction, ce qui, à son tour, a lieu si, et seulement si, B_1', B_1'' se trouvent dans l'espace engendré par $B_1, B_2, \ldots, B_m$ et si les coefficients de B_1 dans les expressions de B_1', B_1'' en fonction de $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sont de même signe, c'est-à-dire si B_1', B_1'' sont situés « d'un même côté » de l'espace $(B_2, \ldots, B_m)$ dans l'espace $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$.

919. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_n] = \begin{vmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & \ldots & B_1B_n \\ B_2B_1 & B_2^2 & \ldots & B_2B_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_nB_1 & B_nB_2 & \ldots & B_n^2 \end{vmatrix} = |\bar{B}B| = |B|^2,$$

où B est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

920. Il découle immédiatement de la définition deux autres propriétés du volume:

d) $V[B_1 + X, B_2, \ldots, B_m] = V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$

pour tout X appartenant à l'espace $(B_2, \ldots, B_m)$, car les points B_1, $B_1 + X$ sont également distants de $(B_2, \ldots, B_m)$, et

e) $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant |B_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$.

En effet, la « hauteur », c'est-à-dire la longueur de la composante du vecteur B_1 orthogonale à $(B_2, \ldots, B_m)$, n'est pas supérieure à la longueur du vecteur B_1 lui-même.

Soient maintenant $C_1, C_2, \ldots, C_m$ les projections orthogonales des vecteurs $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sur l'espace P. Supposons que l'on ait déjà démontré l'inégalité $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$. Désignons par B_1' la composante de B_1 orthogonale à $(B_2, \ldots, B_m)$, par C_1' sa projection sur P. Etant donné que $B_1' - B_1 \in (B_2, \ldots, B_m)$, nous concluons que $C_1' - C \in (C_2, \ldots, C_m)$ et, par conséquent, on a

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m] = V[C_1', C_2, \ldots, C_m] \leqslant |C_1'| \cdot V[C_2, \ldots, C_m].$$

Mais il est évident que $|C_1'| \leqslant |B_1'|$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$. Par conséquent,

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m] \leqslant |B_1'| \cdot V[B_2, \ldots, B_m] = V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

Nous pouvons appliquer la méthode de récurrence, car pour les parallélépipèdes à une dimension le théorème est évident.

921. Il découle de la formule servant à calculer le carré du volume que $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$ si chaque vecteur A_i est orthogonal à chaque vecteur B_j. Dans le cas général, nous remplaçons les vecteurs $B_1, \ldots, B_k$ par leurs projections $C_1, \ldots, C_k$ sur l'espace orthogonal complémentaire de $(A_1, \ldots, A_m)$. En vertu du résultat du problème précédent, $V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[B_1, \ldots, B_k]$, d'où

$$V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_k] =$$
$$= V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k].$$

L'idée de ce problème est analogue à celle du problème n° 518.

922. Découle immédiatement de l'inégalité $V[A_1, \ldots, A_m] \leqslant |A_1| \times \times V[A_2, \ldots, A_m]$ qui, à son tour, découle directement de la définition du volume.

Par son contenu ce problème s'apparente au problème n° 519.

923. Une telle transformation d'un corps dans l'espace à n dimensions entraîne une modification du volume, proportionnelle à la puissance n du coefficient de similitude. Pour le parallélépipède cela découle directement de la formule du volume, et pour tout autre corps le volume est la limite d'une somme de volumes des parallélépipèdes. Par conséquent, le volume $V_n(R)$ de la sphère à n dimensions de rayon R est égal à $V_n(1) \cdot R^n$.

Pour calculer $V_n(1)$ on divise la sphère par un système de « plans » parallèles à $(n-1)$ dimensions et on s'aide du principe de Cavalieri.

Soit x la distance du « plan » sécant au centre.

La section représente une sphère à $(n-1)$ dimensions de rayon $\sqrt{1-x^2}$. Par conséquent,

$$V_n(1) = 2\int_0^1 V_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx = 2V_{n-1}(1)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}dx =$$
$$= V_{n-1}(1)\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = V_{n-1}(1)\, B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$
$$= V_{n-1}(1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Il en découle que

$$V_n(1)=\frac{n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

924. La base est formée des polynômes $1, x, \ldots, x^n$ Le carré du volume du parallélépipède correspondant est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \ldots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix} = \frac{[1!\,2!\ldots n!]^3}{(n+1)!\,(n+2)!\ldots(2n+1)!}.$$

925. a) $\lambda_1=1,\ X_1=c(1,\ -1);\ \lambda_2=3,\ X_2=c(1,\ 1)$;

b) $\lambda_1=7,\ X_1=c(1,\ 1);\ \lambda_2=-2,\ X_2=c(4,\ -5)$;

c) $\lambda_1=ai,\ X_1=c(1,\ i);\ \lambda_2=-ai,\ X_2=c(1,\ -i)$;

d) $\lambda_1=2,\ X_1=c_1(1,\ 1,\ 0,\ 0)+c_2(1,\ 0,\ 1,\ 0)+c_3(1,\ 0,\ 0,\ 1)$;
$\lambda_2=-2,\ X_2=c(1,\ -1,\ -1,\ -1)$;

e) $\lambda=2,\ X=c_1(-2,\ 1,\ 0)+c_2(1,\ 0,\ 1)$;

f) $\lambda=-1,\ X=c(1,\ 1,\ -1)$;

g) $\lambda_1=1,\ X_1=c_1(1,\ 0,\ 1)+c_2(0,\ 1,\ 0);\ \lambda_2=-1,\ X_2=c(1,\ 0,\ -1)$;

h) $\lambda_1=0,\ X_1=c(3,\ -1,\ 2);\ \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{-14}$,
$X_{2,3}=c(3\pm2\sqrt{-14},\ 13,\ 2\mp3\sqrt{-14})$;

i) $\lambda_1=1,\ X_1=c(3,\ -6,\ 20);\ \lambda_2=-2,\ X_2=c(0,\ 0,\ 1)$;

j) $\lambda_1=1,\ X_1=c(1,\ 1,\ 1);\ \lambda_2=\varepsilon,\ X_2=c(3+2\varepsilon,\ 2+3\varepsilon,\ 3+3\varepsilon)$;
$\lambda_3=\varepsilon^2,\ X_3=c(3+2\varepsilon^2,\ 2+3\varepsilon^2,\ 3+3\varepsilon^2)$,

où

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

926. Les valeurs caractéristiques de A^{-1} sont les quantités inverses des valeurs caractéristiques de A. En effet, de $|A^{-1}-\lambda E|=0$ il découle que

$$|E-\lambda A|=0,\quad \left|A-\frac{1}{\lambda}E\right|=0.$$

927. Les valeurs caractéristiques de la matrice A^2 sont égales aux carrés des valeurs caractéristiques de A. En effet, soit

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda).$$

Alors

$$|A+\lambda E|=(\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)\ldots(\lambda_n+\lambda).$$

Multipliant ces égalités l'une par l'autre et remplaçant λ^2 par λ, nous obtenons

$$|A^2-\lambda E|=(\lambda_1^2-\lambda)(\lambda_2^2-\lambda)\ldots(\lambda_n^2-\lambda).$$

928. Les valeurs caractéristiques de A^m sont égales aux puissances $m^{\text{èmes}}$ des valeurs caractéristiques de A.

La manière la plus simple pour s'en assurer consiste à remplacer dans l'égalité

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$$

λ par $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$, ..., $\lambda\varepsilon^{n-1}$, où

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

à multiplier les égalités l'une par l'autre et à remplacer λ^n par λ.

929. $f(A)=b_0(A-\xi_1E)\ldots(A-\xi_mE)$, par conséquent,

$$|f(A)|=b_0^n\cdot|A-\xi_1E|\ldots|A-\xi_mE|=b_0^nF(\xi_1)\ldots F(\xi_m).$$

930. Soit

$$F(\lambda)=|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$$

et

$$f(x)=b_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m).$$

Alors

$$|f(A)|=b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(\lambda_i-\xi_k)=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n).$$

931. Posons

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda$$

et appliquons le résultat du problème précédent.

Nous obtenons

$$|f(A)-\lambda E|=(f(\lambda_1)-\lambda)(f(\lambda_2)-\lambda)\ldots(f(\lambda_n)-\lambda),$$

d'où il découle que $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, ..., $f(\lambda_n)$ sont les valeurs caractéristiques de la matrice $f(A)$.

932. Soit X un vecteur propre de la matrice A correspondant à la valeur caractéristique λ.

Alors

$$\begin{aligned} EX&=X,\\ AX&=\lambda X,\\ A^2X&=\lambda^2X,\\ &\ldots\ldots\\ A^mX&=\lambda^mX. \end{aligned}$$

Multipliant ces égalités vectorielles par des coefficients arbitraires et les additionnant nous obtenons, pour tout polynôme f,

$$f(A)X=f(\lambda)X,$$

ce qui signifie que X est le vecteur propre de $f(A)$ associé à la valeur caractéristique $f(\lambda)$.

933. Les valeurs caractéristiques de A^2 sont n et $-n$ d'ordre de multiplicité $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$ respectivement. Par conséquent, $+\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $+\sqrt{ni}$ et $-\sqrt{ni}$ sont les valeurs caractéristiques de A. Désignons leur ordre de multiplicité par a, b, c, d. Alors $a+b=\frac{n+1}{2}$, $c+d=\frac{n-1}{2}$. La somme des valeurs caractéristiques de la matrice est égale à la somme des éléments de la diagonale principale.

Par conséquent,

$$[a-b+(c-d)i]\sqrt{n}=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}$$

Le module du second membre de cette égalité est égal à $\sqrt{n}$ (problème n° 126). Par conséquent,

$$(a-b)^2+(c-d)^2=1.$$

Les nombres $c-d$ et $c+d$ étant de même parité, nous concluons que

$$a-b=0,\ c-d=\pm 1 \qquad \text{si } \frac{n-1}{2} \text{ est impair}$$

et

$$a-b=\pm 1,\ c-d=0 \qquad \text{si } \frac{n-1}{2} \text{ est pair.}$$

Par conséquent, pour $n=1+4k$

$$c=d=k;\quad a=k+1,\quad b=k \quad \text{ou} \quad a=k,\quad b=k+1,$$

pour $n=3+4k$

$$a=b=k+1;\quad c=k+1,\quad d=k \quad \text{ou} \quad c=k,\quad d=k+1.$$

Par là même, les valeurs caractéristiques sont déterminées au signe près. Pour déterminer le signe nous utilisons le fait que le produit des valeurs caractéristiques est égal au déterminant de la matrice. A l'aide du résultat du problème n° 299, nous obtenons aisément que pour $n=1+4k$

$$a=k+1,\quad b=k,$$

pour $n=3+4k$

$$c=k+1,\quad d=k.$$

Ainsi, les valeurs caractéristiques sont entièrement déterminées.

934. $1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+\sqrt{n}$ pour $n=4k+1$,

$1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+i\sqrt{n}$ pour $n=4k+3$.

935. a) Posons $\frac{x}{y}=\alpha^n$. Alors

$$\lambda_k=y\,\frac{\alpha\varepsilon_k-\alpha^n}{1-\alpha\varepsilon_k},$$

où $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

b) $\lambda_k=a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1}$.

c) $\lambda_k=2i\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

936. $$A\times B-\lambda E_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11}B-\lambda E_m & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B-\lambda E_m & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B-\lambda E_m \end{pmatrix},$$

d'où il découle, en vertu du résultat du problème n° 537, que

$$|A\times B-\lambda E_{mn}|=|\varphi(B)|,$$

où

$$\varphi(x)=|Ax-\lambda E_n|=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i x-\lambda).$$

En vertu du résultat du problème n° 930 on a

$$|\varphi(B)| = \prod_{k=1}^{m} \varphi(\beta_k) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (\alpha_i\beta_k - \lambda).$$

Donc, les valeurs caractéristiques de $A \times B$ sont les nombres $\alpha_i\beta_i$, où α_i sont les valeurs caractéristiques de A et β_k les valeurs caractéristiques de B.

937. Si A est une matrice non singulière, on a

$$|BA - \lambda E| = |A^{-1}(AB - \lambda E)A| = |A^{-1}| \cdot |AB - \lambda E| \cdot |A| = |AB - \lambda E|.$$

On peut se libérer de l'hypothèse de la non-singularité de A par passage à la limite ou par application du théorème sur l'identité des polynômes de plusieurs variables.

On peut de même, par application du théorème sur le produit des matrices rectangulaires, calculer directement les coefficients des polynômes

$$|AB - \lambda E| \quad \text{et} \quad |BA - \lambda E|$$

et s'assurer qu'ils sont égaux.

938. Complétons les matrices A et B jusqu'à obtenir les matrices carrées A' et B' d'ordre n, ajoutant à A $n - m$ lignes et à B $n - m$ colonnes constituées de zéros. Alors $BA = B'A'$, et $A'B'$ s'obtient de AB en la bordant de zéros. L'application du résultat du problème précédent donne ce qu'il fallait démontrer.

Les solutions des problèmes n^os 939, 940, 941 ne sont pas univoques. Les réponses rapportées ci-dessous correspondent à la transformation qui diffère autant peu que possible de la transformation « triangulaire ».

939. a) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$,
$$x_1' = x_1 + x_2,\quad x_2' = x_2 + 2x_3,\quad x_3' = x_3;$$

b) $-x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$,
$$x_1' = x_1,\quad x_2' = x_1 - 2x_2,\quad x_3' = x_1 + x_3;$$

c) $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$,
$$x_1' = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3,\quad x_2' = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2,\quad x_3' = x_3;$$

d) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$,
$$x_1' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\quad x_2' = x_2 + x_3 + x_4,\quad x_3' = x_2 - x_3 + 2x_4,\quad x_4' = x_4;$$

e) $x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2$,
$$x_1' = x_1 + \frac{1}{2}x_2,\quad x_2' = \frac{1}{2}x_2,\quad x_3' = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4,\quad x_4' = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4.$$

940. $x_1'^2 + \frac{3}{4}x_2'^2 + \frac{4}{6}x_3'^2 + \ldots + \frac{n+1}{2n}x_n'^2$

Les variables $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ s'expriment par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linéairement à l'aide de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & & \ldots & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & & \ldots & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & \ldots & 1/4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

941. $$\left(\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+x_4+\ldots+x_n\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2-$$
$$-\left(x_3+\frac{1}{2}x_4+\ldots+\frac{1}{2}x_n\right)^2-$$
$$-\frac{3}{4}\left(x_4+\frac{1}{3}x_5+\ldots+\frac{1}{3}x_n\right)^2-\ldots-\frac{n-1}{2(n-2)}x_n^2.$$

942. La matrice d'une forme quadratique positive est égale à $\bar{A}A$, où A est une matrice réelle non singulière réalisant le passage de la somme des carrés à la forme donnée.

La positivité des mineurs découle du résultat du problème nº 510.

943. Soit $$f=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{n1}x_nx_1+\ldots+a_{nn}x_n^2$$
une forme quadratique. Posons
$$f^{(k)}=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1k}x_1x_k+$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{k1}x_kx_1+\ldots+a_{kk}x_k^2,$$
$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk}\end{vmatrix},$$ r est le rang de la forme f.

Soit
$$f=\alpha_1x_1'^2+\alpha_2x_2'^2+\ldots+\alpha_nx_n'^2,$$
où
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n, \\ x_2' &= \quad\quad x_2+\ldots+b_{2n}x_n, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= \quad\quad\quad\quad x_n. \end{aligned}$$

Le déterminant de la transformation triangulaire étant égal à, 1, nous avons $D_f=\Delta_n=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Posant
$$x_{k+1}=\ldots=x_n=0,$$
nous obtenons
$$f^{(k)}=\alpha_1x_1^{(k)^2}+\alpha_2x_2^{(k)^2}+\ldots+\alpha_kx_k^{(k)^2},$$
où
$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= x_1+b_{12}x_2+\quad+b_{1k}x_k, \\ x_2^{(k)} &= \quad\quad x_2+\ldots+b_{2k}x_k, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ x_k^{(k)} &= \quad\quad\quad\quad x_k. \end{aligned}$$

Il en découle que $\Delta_k = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k$ et que la condition nécessaire pour que la transformation triangulaire en forme diagonale soit possible est

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_r \neq 0.$$

Il est facile de vérifier que cette condition est suffisante.

Ensuite $\alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ pour $k \leqslant r$, $\alpha_k = 0$ pour $k > r$.

Le discriminant de la forme

$$f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f - \alpha_1 x_1'^2 - \ldots - \alpha_k x_k'^2 = \alpha_{k+1} x_{k+1}'^2 + \ldots + \alpha_n x_n'^2$$

est égal à $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \ldots \alpha_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_k}$.

944. La nécessité des conditions de Sylvester a été démontrée au problème nº 942. La suffisance de ces conditions découle du résultat du problème nº 943.

945. Soit l une certaine forme linéaire des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Transformons la forme f par une transformation dont le déterminant est égal à l'unité, supposant que la forme l soit la dernière des nouvelles variables. Effectuons ensuite une transformation triangulaire de la forme f en forme canonique.

La forme f aura alors pour expression

$$f = \alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \ldots + \alpha_n x_n'^2,$$

notons que $x_n' = l$.

Le discriminant de la forme f est égal à $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Le discriminant de la forme $f + l^2$ est égal à $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}(\alpha_n + 1)$. Il est plus grand que le discriminant de la forme f, parce que tous les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ sont positifs.

946. $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + \ldots + 2a_{n1}x_1x_n + \varphi =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{n1}}{a_{11}} x_n\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n),$$

où

$$f_1 = \varphi - a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{n1}}{a_{11}} x_n\right)^2.$$

La forme f_1 est positive et son discriminant est égal à $\frac{D_f}{a_{11}}$, où D_f est le discriminant de f. En vertu du résultat du problème nº 945 $D_{f_1} \geqslant \frac{D_f}{a_{11}}$, ce qu'il fallait démontrer.

947. Se démontre comme le théorème d'inertie.

948. Formons les formes linéaires

$$l_k = u_1 + u_2 x_k + \ldots + u_n x_k^{n-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation donnée.

Aux racines égales correspondront des formes égales, à des racines différentes des formes linéairement indépendantes, aux racines réelles des formes réelles, aux racines complexes conjuguées des formes complexes conjuguées.

Les parties réelle et imaginaire de la forme complexe $l_k = \lambda_k + \mu_k i$ seront linéairement indépendantes l'une de l'autre et de toutes les formes correspondant aux racines différentes de x_k et x_k'.

Formons la forme quadratique

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{k=1}^{n} (u_1 + u_2 x_i + \ldots + u_n x_i^{n-1})^2.$$

Le rang de cette forme est égal au nombre des différentes racines de l'équation donnée. La matrice de ses coefficients est

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

La somme des carrés des formes linéaires complexes conjuguées $l_k = \lambda_k + i\mu_k$ et $l'_k = \lambda_k - i\mu_k$ est égale à $2\lambda_k^2 - 2\mu_k^2$. Par conséquent, le nombre de carrés négatifs dans une représentation canonique arbitraire (d'après le théorème d'inertie) de la forme f est égal au nombre de différents couples de racines complexes conjuguées de l'équation donnée.

949. Découle des résultats des problèmes nos 948, 944.

950. Il est évident que l'opération (f, φ) est distributive. Aussi est-il suffisant de faire la démonstration pour les carrés des formes linéaires.

Soit

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)^2,$$
$$\varphi = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n)^2.$$

Il est facile de voir que l'on a alors

$$(f\varphi) = (\alpha_1\beta_1 x_1 + \alpha_2\beta_2 x_2 + \dots + \alpha_n\beta_n x_n)^2 \geqslant 0.$$

951. a) $4x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3;$$

b) $2x_1'^2 - x_2'^2 + 5x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,$$
$$x_3' = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3;$$

c) $7x_1'^2 + 4x_2'^2 + x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3' = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3;$$

d) $10x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}x_2,$$
$$x_3' = \frac{2\sqrt{5}}{15}x_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}x_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

e) $-7x_1'^2+2x_2'^2+2x_3'^2.$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\\
x_2' &= \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2,\\
x_3' &= \frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3;
\end{aligned}$$

f) $2x_1'^2+5x_2'^2+8x_3'^2,$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\\
x_2' &= \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\\
x_3' &= \frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3;
\end{aligned}$$

g) $7x_1'^2-2x_2'^2+7x_3'^2,$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,\\
x_2' &= \frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\\
x_3' &= \frac{\sqrt{2}}{6}x_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x_2+\frac{\sqrt{2}}{6}x_3;
\end{aligned}$$

h) $11x_1'^2+5x_2'^2-x_3'^2,$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3,\\
x_2' &= \frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\\
x_3' &= \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3;
\end{aligned}$$

i) $x_1'^2-x_2'^2+3x_3'^2+5x_4'^2,$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,\\
x_2' &= \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\\
x_3' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\\
x_4' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;
\end{aligned}$$

j) $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2,$

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,\\
x_2' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,\\
x_3' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,\\
x_4' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x_3-\frac{\sqrt{2}}{2}x_4;
\end{aligned}$$

k) $x_1'^2+x_2'^2+3x_3'^2-x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \qquad +\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$
$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4;$$

l) $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-3x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$$
$$x_2'=\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

m) $x_1'^2-x_2'^2+7x_3'^2-3x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

n) $5x_1'^2-5x_2'^2+3x_3'^2-3x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4.$$

952. a) $\frac{n+1}{2}x_1'^2+\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$;

b) $\frac{n-1}{2}x_1'^2-\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$,

où

$$x_1'=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n);$$
$$x_i'=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{in}x_n, \quad i=2, \ldots, n,$$

où $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ est un système fondamental orthonormé arbitraire de solutions de l'équation

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0.$$

953. $x_1'^2 \cos\frac{\pi}{n+1} + x_2'^2 \cos\frac{2\pi}{n+1} + \ldots + x_n'^2 \cos\frac{n\pi}{n+1}$.

954. Si toutes les valeurs caractéristiques de la matrice A sont situées sur le segment $[a, b]$, alors toutes les valeurs caractéristiques de la matrice $A - \lambda E$ sont négatives pour $\lambda > b$ et positives pour $\lambda < a$. Par conséquent, la forme quadratique de matrice $A - \lambda E$ est négative pour $\lambda > b$ et positive pour $\lambda < a$. Inversement, si la forme quadratique $(A - \lambda E) X \cdot X$ est négative pour $\lambda > b$ et positive pour $\lambda < a$, toutes les valeurs caractéristiques de la matrice $A - \lambda E$ sont positives pour $\lambda < a$ et négatives pour $\lambda > b$.

Par conséquent, toutes les valeurs caractéristiques de la matrice A sont situées sur le segment $[a, b]$.

955. Pour tout vecteur X on a les inégalités

$$aX \cdot X \leqslant AX \cdot X \leqslant cX \cdot X, \quad bX \cdot X \leqslant BX \cdot X \leqslant dX \cdot X,$$

d'où $(a + b) X \cdot X \leqslant (A + B) X \cdot X \leqslant (c + d) X \cdot X$. Par conséquent, toutes les valeurs caractéristiques de la matrice $A + B$ sont comprises dans le segment $[a + c, b + d]$.

956. a) Découle du résultat du problème nº 937.

b) $|AX|^2 = AX \cdot AX = X \cdot \bar{A}AX \leqslant |X|^2 \cdot \|A\|^2$.

Le signe d'égalité a lieu pour le vecteur propre de la matrice $\bar{A}A$, associé à la valeur caractéristique $\|A\|^2$.

c) $|(A + B) X| \leqslant |AX| + |BX| \leqslant (\|A\| + \|B\|) |X|$ pour tout vecteur X. Mais pour un certain vecteur X_0

$$|(A + B) X_0| = (\|A + B\|) \cdot |X_0|.$$

Par conséquent,

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

d) $|ABX| \leqslant \|A\| \cdot |BX| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot |X|$.

Appliquant cette inégalité au vecteur X_0, pour lequel

$$\|AB\| \cdot |X_0| = |ABX_0|,$$

nous obtenons

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

e) Soient $\lambda = p + qi$ une valeur caractéristique de la matrice A et $X = Y + iZ$ le vecteur propre qui lui est associé.

Alors

$$AY = pY - qZ, \quad AZ = qY + pZ,$$

d'où

$$|pY - qZ|^2 \leqslant \|A\|^2 |Y|^2,$$
$$|qY + pZ|^2 \leqslant \|A\|^2 |Z|^2.$$

Ajoutant ces inégalités, nous obtenons

$$|\lambda|^2 (|Y|^2 + |Z|^2) = (p^2 + q^2)(|Y|^2 + |Z|^2) \leqslant \|A\|^2 (|Y|^2 + |Z|^2)$$

et, par conséquent,

$$|\lambda| \leqslant \|A\|.$$

957. Soit A une matrice réelle non singulière; alors $\bar{A}AX \cdot X = |AX|^2$ est une forme quadratique positive, qui peut être réduite à la forme canonique par transformation des variables à l'aide de la matrice triangulaire B dont les éléments diagonaux sont positifs. Par conséquent, $\bar{A}A = \bar{B}B$, d'où il découle que $\overline{AB^{-1}} \cdot AB^{-1} = E$, ce qui signifie que $AB^{-1} = P$ est une matrice orthogonale.

Il en découle que $A = PB$. L'unicité résulte de l'unicité de la transformation triangulaire de la forme quadratique en forme canonique.

958. $\bar{A}A$ est une matrice symétrique dont les valeurs caractéristiques $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives.

Par conséquent,

$$\bar{A}A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} P.$$

Construisons la matrice

$$B = P^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \mu_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \mu_n \end{pmatrix} P,$$

où μ_i est la valeur arithmétique de la racine carrée de λ_i. Il est évident que B est à nouveau une matrice symétrique dont les valeurs caractéristiques sont positives et $B^2 = \bar{A}A$. Il en découle que $AB^{-1} = Q$ est une matrice orthogonale, $A = QB$.

959. Après avoir transféré l'origine des coordonnées au centre de la surface, la surface doit comprendre, avec le point X, le point $-X$ et, par conséquent, l'équation ne doit pas comporter de coordonnées courantes des premiers degrés. Après la transformation de translation des axes $X = X_0 + X'$, où X_0 est le vecteur de translation, l'équation de la surface devient

$$AX' \cdot X' + 2\,(AX_0 + B)\,X' + AX_0 \cdot X_0 + 2BX_0 + C = 0.$$

Aussi, pour l'existence du centre, il faut et il suffit que l'équation $AX_0 + B$ soit résoluble par rapport au vecteur X_0, et pour cela il faut et il suffit que le rang de la matrice A soit égal au rang de la matrice (A, B).

960. Après avoir transféré l'origine des coordonnées au centre, l'équation de la surface prend la forme

$$AX \cdot X + \gamma = 0.$$

Si r est le rang de la matrice A et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les valeurs caractéristiques non nulles, par une transformation orthogonale adéquate des coordonnées, l'équation prend la forme canonique

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \gamma = 0.$$

961. La surface n'a pas de centre si le rang de (A, B) est supérieur au rang de A, ce qui n'est possible que si $r =$ rang $A < n$. Notons par R tout l'espace, par P l'espace AR, par Q le complémentaire orthogonal de P. Alors, pour tout $Y \in Q$ nous avons $AY = 0$, car

$$|AY|^2 = AY \cdot AY = Y \cdot AAY = 0,$$

puisque $AAY \in P$. Soit

$$B = B_1 + B_2, \quad B_1 \in P, \quad B_2 \in Q.$$

Alors $B_2 \neq 0$, sinon B appartiendrait à P, et le rang de (A, B) serait égal à r. Soit $B_1 = AX_0$. Après la translation $X = X_0 + X'$ l'équation de la surface prend la forme

$$AX' \cdot X' + 2B_2X' + c' = 0.$$

Effectuons encore une translation $X' = aB_2 + X''$. Alors

$$AX' \cdot X' = a^2AB_2 \cdot B_2 + 2aAB_2 \cdot X'' + AX'' \cdot X'' = AX'' \cdot X'',$$

car $AB_2 = 0$ et, par conséquent, l'équation prend la forme

$$AX'' \cdot X'' + 2B_2X'' + 2a \mid B_2 \mid^2 + c' = 0.$$

Posons

$$a = -\frac{c'}{2 \mid B_2 \mid^2}.$$

L'équation devient alors

$$AX'' \cdot X'' + 2B_2X'' = 0.$$

Effectuons maintenant une transformation orthogonale des coordonnées, en adoptant comme base de l'espace les vecteurs propres unitaires orthogonaux deux à deux de la matrice A, en leur adjoignant le vecteur unitaire colinéaire au vecteur B_2 et de direction contraire. Cela est possible, car B_2 est le vecteur propre de A. Dans cette base l'équation prend la forme

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 - 2\beta_2 x_{r+1} = 0,$$

où $\beta_2 = \mid B_2 \mid$. Il reste à diviser par β_2.

962. La transformation linéaire de matrice A réalise une application de l'espace dans le sous-espace engendré par les vecteurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dont les coordonnées constituent les colonnes de la matrice A. Il en découle immédiatement le résultat recherché.

963. Soit $e_1, e_2, \ldots, e_q$ la base de Q. Alors Q' est l'espace engendré par $e_1', e_2', \ldots, e_q'$, où $e_1', e_2', \ldots, e_q'$ sont les images de $e_1, e_2, \ldots, e_q$ par la transformation linéaire. Par conséquent, $q' \leqslant q$. En outre, il est évident que $q' \leqslant r$, car Q' est contenu dans R'. Ensuite, soient P' un espace complémentaire de Q, de dimension $p = n - q$, et p' son image par une transformation linéaire. Sa dimension p' n'est pas supérieure à $n - q$. Mais $P' + Q' = R'$, par conséquent, $p' + q' \geqslant r$. D'où

$$q' \geqslant r - p' \geqslant r + q - n.$$

964. Soient r_1 le rang de A, r_2 le rang de B et $BR = Q$. La dimension de Q est égale à r_2. Alors ρ égal au rang de AB est la dimension de $ABR = AQ$. En vertu du résultat du problème précédent, on a $r_1 + r_2 - n \leqslant \rho \leqslant \min(r_1, r_2)$.

965. La répétition de l'opération de projection est équivalente à une opération unique. En effet, lors de la première projection tous les vecteurs de l'espace R se transforment en vecteurs du sous-espace P, qui, lors de la seconde projection, restent invariants. Par conséquent, $A^2 = A$. Inversement, soit $A^2 = A$. Désignons par P l'ensemble de tous les vecteurs $Y = AX$, par Q l'ensemble des vecteurs Z tels que $AZ = 0$. Il est évident que P et Q sont des espaces linéaires. Leur intersection est un vecteur nul, car si $AX = Z$, alors $AX = A^2X = AZ = 0$. Ensuite, pour tout vecteur X on a le développement $X = AX + (E - A) \cdot X$. Il est évident que $(E - A) X \in Q$, car $A(E - A) X = (A - A^2) X = 0$. Aussi $P + Q$ est l'espace tout entier, autrement dit P et Q sont des sous-espaces réciproquement complémentaires. L'opération AX représente le passage du vecteur X à sa composante dans P, c'est-à-dire qu'elle représente l'opération de projection sur P parallèlement à Q.

966. Soit $P \perp Q$. Choisissons une base orthonormale de tout l'espace en réunissant les bases orthonormales P et Q. Dans cette base, la matrice de projec-

tion est de forme diagonale

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans toute autre base orthonormale, la matrice de projection est égale à $A = B^{-1}A'B$, où B est une certaine matrice orthogonale. Il est évident que A est symétrique.

Inversement, si A est une matrice symétrique et $A^2 = A$, les espaces $P = AR$ et $Q = (E - A)R$ sont orthogonaux, car $AX(E - A)Y = X \times \times \bar{A}(E - A)Y = X(A - A^2)Y = 0$.

967. Soit A une matrice antisymétrique. On voit aisément que $AX \cdot X = 0$ pour tout vecteur X réel, car

$$AX \cdot X = X \cdot \bar{A}X = X \cdot (-AX) = -AX \cdot X.$$

Soient $\lambda = \alpha + \beta i$ la valeur caractéristique de la matrice A et $U = X + Yi$ le vecteur propre associé. Alors

$$AX = \alpha X - \beta Y, \quad AY = \beta X + \alpha Y.$$

Il en découle que $\alpha(|X|^2 + |Y|^2) = AX \cdot X + AY \cdot Y = 0$ et $\alpha = 0$. On a ensuite $\beta X \cdot Y + \alpha |Y|^2 = AY \cdot Y = 0$, d'où $X \cdot Y = 0$ pour $\beta \neq 0$; enfin, de l'équation $\beta(|X|^2 - |Y|^2) = AY \cdot X + AX \cdot Y = AY \cdot X - X \cdot AY = 0$ découle $|X| = |Y|$.

968. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

une matrice antisymétrique. Si toutes ses valeurs caractéristiques sont nulles, $A = 0$. En effet, la somme des produits deux par deux de toutes les valeurs caractéristiques est égale à la somme de tous les mineurs principaux du deuxième ordre $\sum\limits_{i<k} a_{ik}^2$, et l'égalité à zéro de cette somme entraîne $a_{ik} = 0$ pour tous les i, k, autrement dit $A = 0$.

Supposons que A possède une valeur caractéristique non nulle $\lambda_1 = a_1 i$. Normons les parties réelle et imaginaire du vecteur propre associé. Par suite de l'égalité de leurs longueurs, le facteur normant est le même, et pour les vecteurs obtenus on a les égalités

$$AX = -a_1 Y; \quad AY = a_1 X.$$

Formons une matrice orthogonale, en plaçant dans les deux premières colonnes X et Y. On a alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots \\ -a_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

La matrice $P^{-1}AP$ étant antisymétrique, tous les éléments omis des deux premières lignes sont nuls, et la matrice formée des éléments des $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, ..., $n^{\text{ème}}$ lignes et des $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$, ..., $n^{\text{ème}}$ colonnes sera antisymétrique. Appliquant à celle-ci les mêmes raisonnements, isolons encore une « cellule » $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}$. Poursuivons le processus jusqu'à ce que l'on obtienne dans l'angle gauche inférieur une matrice dont toutes les valeurs caractéristiques sont nulles. Or, tous les éléments d'une telle matrice sont nuls. Le problème est résolu.

969. Soit

$$B = (E - A)(E + A)^{-1}.$$

Alors

$$\overline{B} = (\overline{E + A})^{-1}(\overline{E - A}) = (E - A)^{-1}(E + A) = B^{-1}.$$

Ensuite,

$$B + E = (E - A)(E + A)^{-1} + (E + A)(E + A)^{-1} = 2(E + A)^{-1}$$

et, par conséquent,

$$|B + E| \neq 0.$$

Inversement, si

$$\overline{B} = B^{-1} \text{ et } |B + E| \neq 0,$$

on peut prendre en qualité de A $(E + B)^{-1}(E - B)$. Il est facile de voir que A est une matrice antisymétrique.

970. Soit A une matrice orthogonale. Alors

$$AX \cdot AY = X \cdot \overline{A}AY = X \cdot Y$$

pour n'importe quels vecteurs réels X et Y. Soient

$$\lambda = \alpha + \beta i$$

la valeur caractéristique de la matrice A et

$$U = X + Yi$$

le vecteur propre associé. Alors

$$AX = \alpha X - \beta Y, \quad AY = \alpha Y + \beta X,$$

d'où

$$|X|^2 = X \cdot X = AX \cdot AX = \alpha^2 |X|^2 + \beta^2 |Y|^2 - 2\alpha\beta X \cdot Y,$$
$$|Y|^2 = Y \cdot Y = AY \cdot AY = \alpha^2 |Y|^2 + \beta^2 |X|^2 + 2\alpha\beta X \cdot Y.$$

Ajoutant ces égalités, nous obtenons $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

971. Pour $\beta \neq 0$ des dernières égalités du problème précédent nous obtenons

$$\beta(|X|^2 - |Y|^2) + 2\alpha X \cdot Y = 0.$$

D'autre part,

$$X \cdot Y = AX \cdot AY = (\alpha^2 - \beta^2) X \cdot Y + \alpha\beta(|X|^2 - |Y|^2),$$

d'où

$$\alpha(|X|^2 - |Y|^2) - 2\beta X \cdot Y = 0.$$

Par conséquent,

$$X \cdot Y = |X|^2 - |Y|^2 = 0.$$

972. 1. Soit $\lambda = \alpha + \beta i = \cos\varphi + i \sin\varphi$ la valeur caractéristique complexe de la matrice. Formons une matrice orthogonale A dont les deux premières colonnes constituent les parties réelle et imaginaire du vecteur propre associé à λ. On a alors

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \dots \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

La matrice $Q^{-1}AQ$ étant orthogonale, la somme des carrés des éléments de chaque ligne est égale à 1, et, par conséquent, tous les éléments omis des deux premières lignes sont nuls.

2. Soient $\lambda=\pm 1$ la valeur caractéristique réelle de la matrice A et X le vecteur propre normé associé.

Formons la matrice orthogonale dont la première colonne est le vecteur X. On a alors

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \pm 1 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Tous les éléments omis de la première ligne sont nuls puisque la somme des carrés des éléments de chaque ligne de la matrice orthogonale $Q^{-1}AQ$ est égale à l'unité.

Appliquant ces raisonnements aux matrices orthogonales restant dans l'angle gauche inférieur, nous obtenons le résultat demandé.

973.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

974.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$,

où $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

975. La «cellule» $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ ne peut pas être périodique.

Remarque. Le résultat n'est pas vrai dans un champ de caractéristique non nulle. Par exemple, dans le champ de caractéristique 2, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = E.$$

976. Soient A une matrice donnée et $B = C^{-1}AC$ sa réduction à la forme canonique de Jordan. La matrice canonique B est de forme triangulaire et ses éléments diagonaux sont égaux aux valeurs caractéristiques de la matrice A; notons que chacune d'elles se répète un nombre de fois égal à sa multiplicité dans l'équation caractéristique. On a ensuite $B'_m = (C'_m)^{-1}A'_mC'_m$ (problème nº 531). Par conséquent, les polynômes caractéristiques des matrices A'_m et B'_m coïncident. Pour une numérotation appropriée de combinaisons la matrice B'_m a une forme triangulaire, et, par conséquent, ses valeurs caractéristiques sont égales aux éléments diagonaux. Il est évident que ceux-ci sont égaux à tous les produits possibles des valeurs caractéristiques de la matrice A, prises m par m.

977. Il est évident que les matrices $A - \lambda E$ et $\bar{A} - \lambda E$ ont des éléments simples identiques. Par conséquent, A et $\bar{A}$ se transforment en une même matrice canonique et, par conséquent, se transforment l'une en l'autre.

978. Si $A = CD$, où C, D sont des matrices symétriques et la matrice C est non singulière, on a $\bar{A} = DC$, et, par conséquent, $\bar{A} = C^{-1}AC$. Aussi convient-il de rechercher la matrice C parmi les matrices transformant A en $\bar{A}$.

Soit $A = SBS^{-1}$, où B est une matrice canonique:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}, \text{ où } B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Alors $\bar{A} = \bar{S}^{-1}\bar{B}\bar{S}$. Désignons par H_i la matrice

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdot & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que $\bar{B}_i = H_i^{-1}B_iH_i$ et, par conséquent,

$$\bar{B} = H^{-1}BH, \text{ où } H = \begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_k \end{pmatrix}.$$

Donc, $\bar{A} = \bar{S}^{-1}H^{-1}BH\bar{S} = \bar{S}^{-1}H^{-1}S^{-1}ASH\bar{S} = C^{-1}AC$, où $C = SH\bar{S}$. Il est évident que la matrice C est symétrique. Posons $D = C^{-1}A$. Alors $\bar{D} = \bar{A}C^{-1} = C^{-1}ACC^{-1} = D$. Donc, la matrice D aussi est symétrique et $A = CD$.

979. Soit $|A-\lambda E|=(-1)^n(\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}-c_2\lambda^{n-2}-\ldots-c_n)$. Il est évident que $p_1=\operatorname{Tr} A=c_1$. Admettons que l'on ait déjà démontré que $p_1=c_1$, $p_2=c_2, \ldots, p_{k-1}=c_{k-1}$, et, sous cette hypothèse, démontrons que $p_k=c_k$. D'après la construction $A_k=A^k-p_1A^{k-1}-p_2A^{k-2}-\ldots-p_{k-1}A=A^k-c_1A^{k-1}-c_2A^{k-2}-\ldots-c_{k-1}A$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} A_k = kp_k &= \operatorname{Tr} A^k-c_1 \operatorname{Tr} A^{k-1}-\ldots-c_{k-1} \operatorname{Tr} A=\\ &=S_k-c_1S_{k-1}-\ldots-c_{k-1}S_1,\end{aligned}$$

où $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sont les sommes des puissances des valeurs caractéristiques de la matrice A. Mais d'après les formules de Newton $S_k-c_1S_{k-1}-\ldots-c_{k-1}S_1=kc_k$. Par conséquent,

$$p_k=c_k.$$

Ensuite, $B_n=A^n-c_1A^{n-1}-\ldots-c_{n-1}A-c_nE=0$, en vertu de la relation de Hamilton—Cayley. On a enfin

$$AB_{n-1}=A_n=c_nE,$$

d'où

$$B_{n-1}=c_nA^{-1}.$$

980. Soit

$$C=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons la matrice diagonale

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

dont les éléments diagonaux sont arbitraires, mais deux par deux différents Posons

$$Y=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$XY-YX=\begin{pmatrix} 0 & b_{12}(\alpha_2-\alpha_1) & \ldots & b_{1n}(\alpha_n-\alpha_1) \\ b_{21}(\alpha_1-\alpha_2) & 0 & \ldots & b_{2n}(\alpha_n-\alpha_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1}(\alpha_1-\alpha_n) & b_{n2}(\alpha_2-\alpha_n) & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

et, par conséquent, il suffit de prendre $b_{ik}=\dfrac{c_{ik}}{\alpha_k-\alpha_i}$ pour $i \neq k$. Ensuite, par application de la méthode de récurrence, nous établissons que chaque matrice dont la trace est égale à zéro est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls. Etant donné que $\operatorname{Tr} C=0$, $C \neq \mu E$ pour $\mu \neq 0$ et, par conséquent, il existe un vecteur U tel que CU et U sont linéairement indépendants. Incluant dans la base les vecteurs U et CU, nous obtenons que C est semblable à la matrice

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ 1 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & \Gamma \end{pmatrix}.$$

Il est évident que $\operatorname{Tr} \Gamma = \operatorname{Tr} C = 0$.

Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, $\Gamma = S^{-1}\Gamma' S$, où Γ' est une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls. Ainsi, tous les éléments diagonaux de la matrice

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & PS \\ S^{-1}Q & S^{-1}\Gamma S \end{pmatrix}$$

sont nuls.

TABLE DES MATIÈRES

PARTIE II

INDICATIONS

PARTIE III

RÉPONSES ET SOLUTIONS

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:
Editions MIR,
2 Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110,
GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique